# 第二十八章 锐角三角函数

## 28.1 锐角三角函数

### 课时 1 正弦

**刷基础**

1. C 【解析】选项 A，$\because BD\perp AC$ 于 $D$，$CE\perp AB$ 于 $E$，$\therefore \sin A=\frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$，不符合题意；选项 B，$\because \angle A+\angle ACE=90°$，$\angle ACE+\angle COD=90°$，$\therefore \angle A=\angle COD$，$\therefore \sin A=\sin\angle COD=\frac{CD}{OC}$，不符合题意；选项 C，无法得出 $\sin A=\frac{AE}{AD}$，符合题意；选项 D，$\because \angle BOE=\angle COD$，$\therefore \angle A=\angle BOE$，$\therefore \sin A=\sin\angle BOE=\frac{BE}{BO}$，不符合题意. 故选 C.

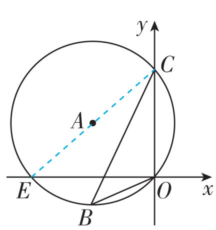
2. C 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若$\triangle ABC$ 的三边都缩小为原来的$\frac{1}{3}$，则变化后的三角形与原三角形相似，根据相似三角形的对应角相等，可知$\angle A$ 的大小没有发生变化，故 $\sin A$ 的值不变. 故选 C.

**易错警示** 一个锐角的三角函数值是一个比值，它的大小只与这个角的大小有关.

3. B 【解析】设 $AB=BD=x$. $\because \angle B=90°$，$\therefore AD=\sqrt{2}x$. $\because AD=\sqrt{2}CD$，$\therefore CD=x$，$\therefore BC=2x$，$\therefore AC=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$，$\therefore \sin C=\frac{AB}{AC}=\frac{x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

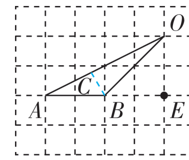
4. C 【解析】$\because$ 每个直角三角形的两条直角边长分别为 5，12，$\therefore$ 每个直角三角形的斜边长为$\sqrt{5^2+12^2}=13$. $\because$ 直角三角形的较小的锐角为 $\alpha$，$\therefore \sin\alpha=\frac{5}{13}$，故选 C.

5. $\frac{3}{5}$ 【解析】如图，连接 $EC$. $\because \angle COE=90°$，$\therefore EC$ 是$\odot A$ 的直径. $\because C(0,6)$，$E(-8,0)$，$\therefore OC=6$，$OE=8$，由勾股定理得 $EC=\sqrt{6^2+8^2}=10$. $\because \angle OBC=\angle OEC$，$\therefore \sin\angle OBC=\sin\angle OEC=\frac{OC}{EC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.




**关键点拨** 连接 $EC$，根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle OBC=\angle OEC$，即将求 $\sin\angle OBC$ 的值转化成求 $\sin\angle OEC$ 的值.

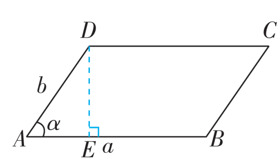
6. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】如图，过 $B$ 作 $BC\perp OA$ 于 $C$，取格点 $E$. $\because \angle OEB=90°$，$\therefore$ 由勾股定理得 $AO=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$OB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. $\because S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AB\times OE=\frac{1}{2}\times OA\times BC$，




$\therefore 2\times2=2\sqrt{5}\times BC$，$\therefore BC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \angle AOB$ 的正弦值是$\frac{BC}{OB}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

7. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle BAD=90°$. $\because AE\perp BD$，$\therefore \angle AEB=\angle AED=90°$，$\therefore \angle ADB=90°-\angle ABE=\angle BAE$，$\therefore \sin\angle ADB=\sin\angle BAE=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{1}{2}$. $\because BD=8$，$\therefore AB=4$. $\because \sin\angle BAE=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$，$\therefore BE=2$，$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=2\sqrt{3}$，故选 C.

8. $ab\cdot\sin\alpha$ 【解析】如图，过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$.

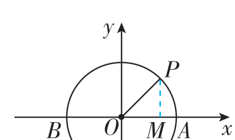



在 Rt$\triangle ADE$ 中，$DE=AD\cdot\sin\angle DAB=b\cdot\sin\alpha$，$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $ab\cdot\sin\alpha$.

### 课时 2 余弦和正切

**刷基础**

1. A 【解析】如图，作 $PM\perp OA$ 于点 $M$. $\because A(1,0)$，$\therefore OA=1$. $\because$ 点 $A$，$P$ 在以 $O$ 为圆心的圆上，$\therefore OP=OA=1$. $\because$ 点 $P(a,b)$ 在第一象限，且 $PM\perp OA$，$\therefore OM=a$，$\therefore \cos\angle POA=\frac{OM}{OP}=\frac{a}{1}=a$，故选 A.




2. B 【解析】$\because \angle C=90°$，$AC=2BC$，$\therefore$ 由勾股

定理,得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5}BC$. ①$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故①错误;②$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,故②错误;③$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$,故③正确. 故选 B.

**3.** $\frac{1}{2}$ 【解析】$\because$ Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=8$,$BC=6$,$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$. 由翻折的性质可得 $BE=BC=6$,$DE=DC$,$\angle BED=\angle C=90°$,$\therefore AE=AB-BE=10-6=4$. 设 $DE=CD=x$,则 $AD=AC-DC=8-x$. 在 Rt$\triangle AED$ 中,$AE^2+DE^2=AD^2$,$\therefore 4^2+x^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$,$\therefore DE=CD=3$,$\therefore \tan\angle DBC=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}$,故答案为$\frac{1}{2}$.

**4.** C 【解析】$\because$ 点 $A(t,3)$ 在第一象限,$\therefore AB=3$,$OB=t$. 又$\because \tan\alpha=\frac{AB}{OB}=\frac{3}{2}$,$\therefore t=2$.

**5.** B 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中,设$\angle C$ 为直角,斜边为 $c$. 已知锐角$\angle A$ 及其对边 $a$,根据锐角三角函数定义可知,$\sin A=\frac{a}{c}$,$\therefore c=\frac{a}{\sin A}$,故选 B.

**6.** 10 【解析】$\because \angle B=90°$,$\therefore \cos\angle BAC=\frac{AB}{AC}$,$\therefore AC=\frac{AB}{\cos\angle BAC}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$. $\because AC\perp CD$,$\therefore \angle ACD=90°$,$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$. 故答案为 10.

思路分析 由已知锐角的余弦值求出 $AC$ 的长,再根据勾股定理求出 $AD$ 的长即可.

**7.** B 【解析】$\because \sin(70°-\alpha)=\cos 50°$,$\therefore 70°-\alpha+50°=90°$,$\therefore \alpha=30°$. 故选 B.

**8.** 【解】是常数. 证明:$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 的对边分别为 $a$,$b$,$c$,$\therefore \cos A=\frac{b}{c}$,$\cos B=\frac{a}{c}$,$a^2+b^2=c^2$,$\therefore \frac{a^2}{bc}\cos A+\frac{b^2}{ac}\cos B=\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{a}{c}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$,$\therefore \frac{a^2}{bc}\cos A+\frac{b^2}{ac}\cos B$ 的值是常数.

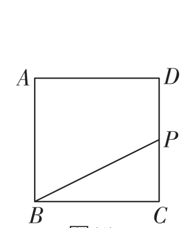
## 刷易错

**9.** C 【解析】分两种情况讨论如下:当$\angle B=90°$时,$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4AB^2-AB^2}=\sqrt{3}AB$,$\therefore \cos C=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{3}AB}{2AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;当$\angle A=90°$时,$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{AB^2+4AB^2}=\sqrt{5}AB$,$\therefore \cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{2AB}{\sqrt{5}AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,故选 C.

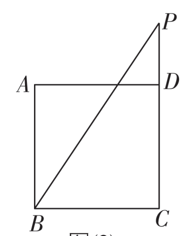
易错警示 题中没有说明哪个角是直角,所以需分两种情况讨论,不要漏解.

**10.** 2 或$\frac{2}{3}$ 【解析】①当点 $P$ 在线段 $DC$ 上时,如图(1). $\because CD=2$,$DP=1$,$\therefore PC=1$. 又$\because BC=2$,$\angle C=90°$,$\therefore \tan\angle BPC=\frac{BC}{PC}=2$. ②当点 $P$ 在 $CD$ 的延长线上时,如图(2). $\because DP=1$,$DC=2$,$\therefore PC=3$. 又$\because BC=2$,$\angle C=90°$,$\therefore \tan\angle BPC=\frac{BC}{PC}=\frac{2}{3}$. 故答案为 2 或$\frac{2}{3}$.

易错警示 对于此题,题目中未明确点 $P$ 在直线 $CD$ 上的位置,应分为 $P$ 在线段 $CD$ 上和 $P$ 在 $CD$ 的延长线上两种情况讨论.



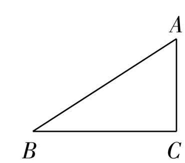
图(1)



图(2)

## 刷提升

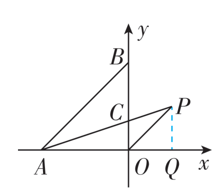
**1.** B 【解析】如图,当$\angle C=90°$时,$\because \tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$,$\therefore$ 设 $AC=3x$,$BC=4x$. $\because AC^2+BC^2=AB^2$,$\therefore 9x^2+16x^2=100$,$\therefore x=2$ 或 $x=-2$(舍去),$\therefore AC=6$,$BC=8$. $\because \triangle ABC$ 的形状和大小都被确定,$\therefore AC=6$ 或 $AC\geqslant 10$,$\therefore$ 线段 $AC$ 的长度不可能为 8. 故选 B.




**2.** C

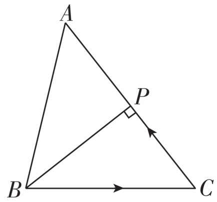
添加辅助线 因为要求 $\tan\angle OAP$ 的值,所以需要构造直角三角形,又已知 $P$ 点的坐标,故过点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线段.

【解析】如图,过点 $P$ 作 $PQ\perp x$ 轴于点 $Q$. $\because OP\parallel AB$,$\therefore \triangle OCP\backsim\triangle BCA$,$\therefore CP:AC=OC:BC=1:2$. $\because \angle AOC=\angle AQP=90°$,$\therefore CO\parallel PQ$,$\therefore OQ:AO=CP:AC=1:2$. $\because P(1,1)$,$\therefore PQ=OQ=1$,$\therefore AO=2$,$\therefore \tan\angle OAP=\frac{PQ}{AQ}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$. 故选 C.



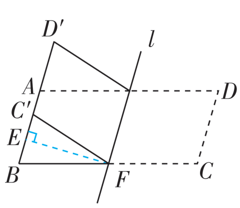

**3.** $\frac{3}{5}$ 【解析】由题图(1)可知点 $P$ 在 $BC$ 上运动时,$BP$ 的长度不断增大;点 $P$ 在 $CA$ 上运动时,$BP$ 的长度先逐渐减小,再逐渐增大. 结

合题图(2)可知，$BC=5$，当 $BP\perp AC$ 时，$BP=4$. 如图所示，当 $BP\perp AC$ 时，$CP=\sqrt{BC^2-BP^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，$\therefore\ \cos\angle ACB=\frac{PC}{BC}=\frac{3}{5}$，故答案为$\frac{3}{5}$.

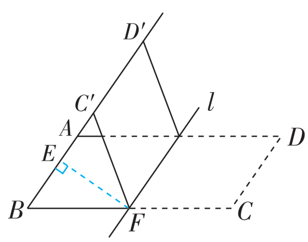



**4.** $\frac{2}{7}$或$\frac{4}{7}$　【解析】当 $C'$ 在线段 $AB$ 上时，如图(1)，设直线 $l$ 交 $BC$ 于点 $F$. 根据 $AC':AB:BC=1:3:7$，可设 $AC'=1$，$AB=3$，$BC=7$，由翻折的性质知 $\angle FCD=\angle FC'D'$，$CF=C'F$. $\because$ 将 $CD$ 沿直线 $l$ 翻折至 $AB$ 所在直线，$\therefore\ \angle BC'F+\angle FC'D'=\angle FCD+\angle FBA=180°$，$\therefore\ \angle BC'F=\angle FBA$，$\therefore\ CF=BF=C'F=\frac{7}{2}$. 过 $F$ 作 $AB$ 的垂线与 $AB$ 交于 $E$，$\therefore\ BE=\frac{1}{2}BC'=\frac{1}{2}(AB-AC')=1$，$\therefore\ \cos\angle ABC=\frac{BE}{BF}=\frac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}$.

**思路分析** 分别考虑 $C'$ 在线段 $AB$ 上时和 $C'$ 在 $BA$ 的延长线上时两种情况，根据题意假设出 $AC'$，$AB$，$BC$ 的长度，再根据翻折的性质求得所需线段的长度，即可求解.




图(1)




图(2)

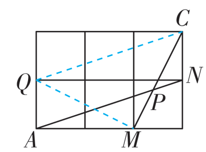
当 $C'$ 在 $BA$ 的延长线上时，如图(2)，设直线 $l$ 交 $BC$ 于点 $F$. 根据 $AC':AB:BC=1:3:7$，可设 $AC'=1$，$AB=3$，$BC=7$，同理可得 $CF=BF=C'F=\frac{7}{2}$. 过 $F$ 作 $AB$ 的垂线与 $AB$ 交于 $E$，$\therefore\ BE=\frac{1}{2}BC'=\frac{1}{2}(AB+AC')=2$，$\therefore\ \cos\angle ABC=\frac{BE}{BF}=\frac{2}{\frac{7}{2}}=\frac{4}{7}$. 故答案为$\frac{2}{7}$或$\frac{4}{7}$.

**刷素养**

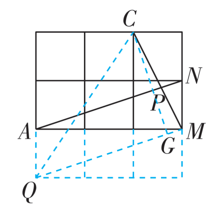
**5.**【解】【方法学习】$\because\ CE\parallel MN$，$\therefore\ \angle MND=\angle CPN$，$\therefore\ \tan\angle MND=\tan\angle CPN$. 由题可知 $\angle DMN=90°$，$\therefore\ \tan\angle CPN=\tan\angle MND=\frac{DM}{MN}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$，故 $\tan\angle CPN$ 的值为 2. 故答案为 2.

【问题解决】

(1)如图(1)，取格点 $Q$，连接 $QM$，$CQ$. $\because\ CQ\parallel AN$，$\therefore\ \angle CPN=\angle QCM$. $\because\ CQ=\sqrt{10}$，$MQ=CM=\sqrt{5}$，$\therefore\ CQ^2=MQ^2+CM^2$，$\therefore\ \angle QMC=90°$，$\therefore\ \cos\angle CPN=\cos\angle QCM=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故答案为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.




图(1)

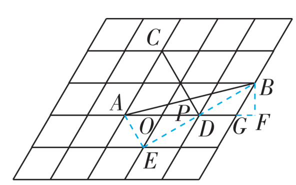



图(2)

(2)如图(2)，取格点 $Q$，连接 $QM$，$CQ$，过点 $C$ 作 $CG\perp QM$ 于点 $G$. $\because\ QM\parallel AN$，$\therefore\ \angle CPA=\angle CMG$，$\therefore\ \sin\angle CPA=\sin\angle CMG=\frac{CG}{CM}$. $\because\ CM=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$QM=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$\therefore\ \frac{1}{2}\times\sqrt{10}\,CG=3\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{7}{2}$，$\therefore\ CG=\frac{7\sqrt{10}}{10}$，$\therefore\ \sin\angle CPA=\sin\angle CMG=\frac{CG}{CM}=\frac{7\sqrt{10}}{10}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\therefore\ \sin\angle CPA$ 的值为$\frac{7\sqrt{2}}{10}$. 故答案为$\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

【思维拓展】

如图(3)，取格点 $E$，连接 $EA$，$EB$. 设每个小菱形的边长为 1. 由题易得 $EA\parallel CD$，$\angle AEO=60°$，$\angle BEO=30°$，$\therefore\ \angle APC=\angle BAE$，$\angle AEB=90°$. 过点 $B$ 作 $BF\perp AG$，交 $AG$ 的延长线于点 $F$，则 $\angle BFG=90°$. 由题易得 $\angle BGF=60°$，$\therefore\ \angle GBF=30°$. $\because\ BG=1$，$\therefore\ GF=\frac{1}{2}$，$\therefore\ BF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\ AF=AG+GF=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，$\therefore\ AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$. $\because$ 易知 $AE=1$，$\therefore\ \cos\angle CPA=\cos\angle BAE=\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，$\therefore\ \cos\angle CPA$ 的值为$\frac{\sqrt{13}}{13}$.




图(3)

**思路分析** 【思维拓展】取格点 $E$，连接 $EA$，$EB$，设每个小菱形的边长为 1，过点 $B$ 作 $BF\perp AG$ 交 $AG$ 延长线于点 $F$，那么 $\angle CPA$ 就变换到 $\mathrm{Rt}\triangle BAE$ 中，由锐角三角函数的定义可得出答案.

## 课时 3　求锐角的三角函数值

**刷基础**

1. D　【解析】连接 $BC$. 由题意可得 $OB=OC=BC$，则 $\triangle OBC$ 是等边三角形，故 $\sin\angle AOC=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

2. C　【解析】$\because \sin(\angle A+15°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $\angle A+15°$ 为锐角，$\therefore\ \angle A+15°=60°$，$\therefore\ \angle A=45°$，$\therefore \tan A=\tan 45°=1$，故选 C.

3. $\dfrac{1}{2}$　【解析】$\because\ \angle BOC=45°$，$\angle AOD=30°$，$\therefore\ \angle AOB=45°-30°=15°$，$\therefore\ 2\angle AOB=30°$，$\therefore \sin 2\angle AOB=\dfrac{1}{2}$.

4. 【解】(1) 原式 $=\dfrac{1}{2}-2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\sqrt{\tan^2 60°-4\tan 60°+4}-\dfrac{3\cos 60°}{5\sin 30°-1}=|\tan 60°-2|-\dfrac{3\times\frac{1}{2}}{5\times\frac{1}{2}-1}=2-\sqrt{3}-1=1-\sqrt{3}$.

(3) $|-3|+(\pi-2\ 023)^0-2\sin 30°+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3+1-1+3=6$.

5. B　【解析】由 $|\tan^2B-3|+(2\sin A-\sqrt{3})^2=0$，得 $\tan^2B-3=0$，$2\sin A-\sqrt{3}=0$. $\because\ \angle A$，$\angle B$ 均为锐角，$\therefore \tan B=\sqrt{3}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\ \angle A=60°$，$\angle B=60°$，$\therefore\ \angle C=180°-\angle A-\angle B=60°$，$\therefore\ \triangle ABC$ 是等边三角形，故选 B.

**思路分析**　根据非负数的性质和特殊角的三角函数值可得 $\angle A=\angle B=60°$，进而可得答案.

6. $-\dfrac{3}{2}$　【解析】$\because \sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ 点 $B$ 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$. 根据"关于 $y$ 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数"可知，点 $A$ 的坐标为 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$. $\because$ 函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象经过点 $A$，$\therefore k=\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

7. A　【解析】$\because \tan A=0.189\ 0$，$\therefore$ 利用科学计算器求 $\angle A$ 的度数，按键顺序为选项 A. 故选 A.

8. $27°16'38''$　【解析】如果 $\cos A=0.888\ 8$，那么 $\angle A\approx 27°16'38''$. 故答案为 $27°16'38''$.

**刷易错**

9. 【解】不正确. 理由：$\because \sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\ \angle A=60°$，$\therefore \sin\dfrac{A}{2}=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$.

**易错警示**　注意角的关系和角的三角函数值无关，不要误认为两者有对应关系.

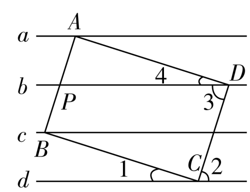
## 大招专题 4　求锐角三角函数值的常见方法

**刷难关**

**大招解读｜等角转化法**

当一个锐角的三角函数值不能直接求解或锐角不在直角三角形中时，可以将此角通过等角转换到能够求出三角函数值的直角三角形中，利用"若两锐角相等，则三角函数值也相等"来解决.

1. C　【解析】如图，设 $AB$ 交直线 $b$ 于点 $P$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore\ \angle BAD=\angle BCD=\angle ADC=90°$. $\because a/\!/b/\!/c/\!/d$，且间隔相等，$\therefore\ \angle 2=\angle 3$，$AP=\dfrac{1}{2}AB=2$. $\because\ \angle BCD=90°$，$\angle ADC=90°$，$\therefore\ \angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 3+\angle 4=90°$. $\because\ \angle 2=\angle 3$，$\therefore\ \angle 1=\angle 4$，$\therefore \tan\angle 1=\tan\angle 4=\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，故选 C.



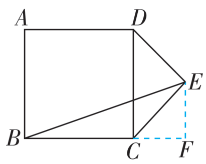

2. $\dfrac{4}{5}$　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $AC=6$，$BD=8$，$\therefore AC\perp BD$，$OB=OD=4$，$OA=OC=3$，$\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because AE\perp BC$，$OA=OC$，$\therefore OE=OA=OC$，$\therefore\ \angle AEO=\angle EAO$. $\because AE\perp BC$，$AC\perp BD$，$\therefore\ \angle OBC+\angle BCO=\angle EAC+\angle BCO$，$\therefore\ \angle OBC=\angle EAC$，$\therefore\ \angle AEO=\angle OBC$，$\therefore \cos\angle AEO=\cos\angle OBC=\dfrac{OB}{BC}=\dfrac{4}{5}$. 故答案为 $\dfrac{4}{5}$.

**大招解读｜构造直角三角形法**

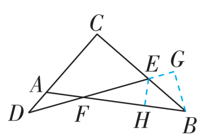
直角三角形是运用三角函数的前提条件，故当题目中未出现直角三角形时，需通过添加辅助线构造直角三角形，然后求解.

3. $\dfrac{1}{3}$　【解析】过点 $E$ 作 $EF\perp BC$，交 $BC$ 的延长线于 $F$，如图. 设 $DE=CE=a$. $\because\ \triangle CDE$ 为等腰

直角三角形，∴ $CD=\sqrt{2}CE=\sqrt{2}a$，$\angle DCE=45°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $CB=CD=\sqrt{2}a$，$\angle BCD=90°$，∴ $\angle ECF=45°$，∴ $\triangle CEF$ 为等腰直角三角形，∴ $CF=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中，$\tan\angle EBF=\frac{EF}{BF}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{1}{3}$，即 $\tan\angle EBC=\frac{1}{3}$. 故答案为$\frac{1}{3}$.




**4.** $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$　【解析】如图，过 $B$ 作 $BG\perp EF$，交 $FE$ 延长线于点 $G$. ∵ $\angle AFD=\angle BFG$，∴ $\tan\angle BFG=\tan\angle AFD=\frac{1}{2}$，即 $\frac{BG}{GF}=\frac{1}{2}$，∴ 设 $BG=a$，$GF=2a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BGF$ 中，$BG^2+GF^2=BF^2$，即 $a^2+4a^2=5$，解得 $a=1$（负值已舍去），∴ $BG=1$，$GF=2$. ∵ $\angle C=\angle G=90°$，$\angle CED=\angle GEB$，∴ $\angle D=\angle GBE=\angle ABC$，∴ $BE$ 平分 $\angle ABG$. 过 $E$ 作 $EH\perp AB$ 于点 $H$，则 $EG=EH$. ∵ $\tan\angle AFD=\tan\angle EFH=\frac{EH}{FH}=\frac{1}{2}$，∴ 设 $EH=EG=b$，$FH=2b$，∴ $EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=\sqrt{5}b$. ∵ $GF=GE+EF$，∴ $b+\sqrt{5}b=2$，解得 $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴ $EF=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. 故答案为$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.




**关键点拨** 所求线段 $EF$ 不在直角三角形中，需作垂线构造直角三角形，把所求线段 $EF$ 放在直角三角形中. 由于已知线段 $BF$ 也不在直角三角形中，也需作垂线构造直角三角形，把已知线段 $BF$ 放在直角三角形中.

**大招解读｜巧设参数法**

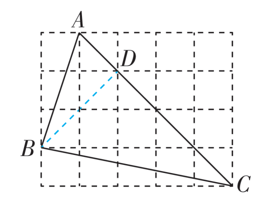
锐角三角函数的实质就是直角三角形中对应两边长度的比，所以在解题过程中有时需要将三角函数转化为线段比，通过设定一个参数，并用含该参数的代数式表示出直角三角形各边的长，再结合题中条件解决问题.

**5.** $\frac{12}{13}$　【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}$，∴ 设 $AC=12k$，$BC=5k$，则 $AB=\sqrt{(12k)^2+(5k)^2}=13k$，∴ $\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12k}{13k}=\frac{12}{13}$. 故答案为$\frac{12}{13}$.

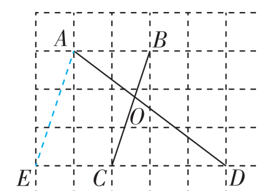
## 微专题

**1.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$　【解析】如图，取格点 $D$，连接 $BD$. 由题意得 $AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$BC=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$，$BD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ∵ $AD^2+BD^2=2+8=10$，$AB^2=10$，∴ $AD^2+BD^2=AB^2$，∴ $\triangle ABD$ 是直角三角形，$\angle ADB=90°$，∴ $\angle BDC=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，$\sin C=\frac{BD}{BC}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. 故答案为$\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

**关键点拨** 取格点 $D$，连接 $BD$，根据勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABD$ 是直角三角形，得到 $\angle ADB=\angle BDC=90°$ 是本题解题关键.



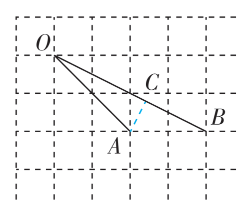

（第 1 题图）




（第 2 题图）

**2.** 3　【解析】如图，取格点 $E$，连接 $AE$. ∵ $AB\parallel EC$，$AB=EC=2$，∴ 四边形 $AECB$ 是平行四边形，∴ $AE\parallel BC$. ∵ $AD=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$DE=5$，∴ $AD=DE=5$，∴ $\angle DAE=\angle DEA$. ∵ $AE\parallel BC$，∴ $\angle DAE=\angle DOC$，∴ $\angle DOC=\angle DEA$，∴ $\tan\angle COD=\tan\angle DEA=\frac{3}{1}=3$，故答案为 3.

**3.** $\frac{1}{3}$　【解析】如图，作 $AC\perp OB$ 于点 $C$. 由题意可知，$OB=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. ∵ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot OB$，∴ $AC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ∵ $OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，∴ $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{8-\frac{4}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，∴ $\tan\angle AOB=\frac{AC}{OC}=\frac{1}{3}$，故答案为$\frac{1}{3}$.




## 28.2　解直角三角形及其应用

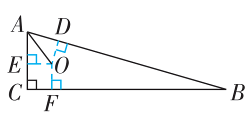
### 28.2.1　解直角三角形

## 刷基础

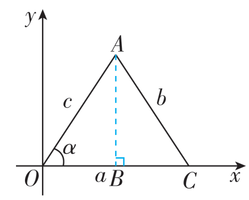
**1.** B　【解析】∵ $\angle C=90°$，∴ $\sin A=\frac{a}{c}$，∴ $c=\frac{a}{\sin A}$. 故选 B.

**2. A** 【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$CD$ 是 $AB$ 边上的高线，∴ $\angle A+\angle ACD=\angle ACD+\angle BCD=90°$，∴ $\angle A=\angle BCD=\alpha$. 在不同的直角三角形中，根据正弦、余弦及正切的定义可知，$\sin\alpha=\frac{CD}{AC}=\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BC}$，$\cos\alpha=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}$，$\tan\alpha=\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{CD}$，∴ $AB\cdot\sin^2\alpha=AB\cdot\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{BC^2}{AB}$. ∵ $\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BC}$，∴ $BC^2=AB\cdot BD$，∴ $\frac{BC^2}{AB}=\frac{AB\cdot BD}{AB}=BD$，即 $BD=AB\cdot\sin^2\alpha$，故 A 选项符合题意. $AB\cdot\sin\alpha\cdot\tan\alpha=AB\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{BD}{CD}=\frac{BC\cdot BD}{CD}$，显然 $BC$ 与 $CD$ 一定不相等，∴ $AB\cdot\sin\alpha\cdot\tan\alpha$ 一定不等于 $BD$，故 B 选项不符合题意. $AB\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha=AB\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{CD}{AC}=CD$. ∵ $AD$ 与 $CD$ 不一定相等，∴ $AB\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ 不一定等于 $AD$，故 C 选项不符合题意. $AB\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha=AB\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BC}{AC}=BC$. ∵ $AD$ 与 $BC$ 不一定相等，∴ $AB\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha$ 不一定等于 $AD$，故 D 选项不符合题意. 故选 A.

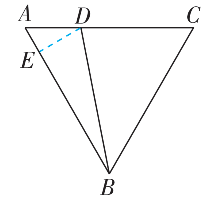
**3.** $\frac{4}{5}$ 【解析】如图，点 $O$ 为 Rt△$ABC$ 的内心，作 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$，$OF\perp BC$，则 $OE=OF=OD$，∴ 四边形 $OECF$ 是正方形. 在 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\tan\angle ABC=\frac{7}{24}=\frac{AC}{BC}$，∴ 设 $AC=7x$，$BC=24x$，∴ $BA=\sqrt{AC^2+BC^2}=25x$. 设 $OE=OF=OD=r$，则 $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\cdot r$，∴ $r=\frac{AC\cdot BC}{AB+BC+AC}=3x$，∴ $OE=CE=3x$，∴ $AE=4x$，∴ $AO=\sqrt{AE^2+OE^2}=5x$，∴ $\cos\angle OAC=\frac{AE}{OA}=\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$，故答案为 $\frac{4}{5}$.




**4. B** 【解析】如图，过点 $A$ 作 $AB\perp x$ 轴，垂足为 $B$，∴ $\sin\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{c}$，$\cos\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{OB}{c}$，∴ $AB=c\sin\alpha$，$OB=c\cos\alpha$，∴ 点 $A$ 的坐标是 $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$，故选 B.




（第 4 题图）




（第 5 题图）

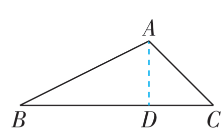
**思路分析◀** 过点 $D$ 作 $DE\perp AB$，垂足为 $E$，根据等边三角形的性质可得 $AB=BC=AC=2\sqrt{3}$，$\angle A=60°$，然后在 Rt△$DEB$ 中，根据锐角三角函数的定义可设 $DE=\sqrt{3}x$，$BE=5x$，再在 Rt△$ADE$ 中，利用锐角三角函数的定义得出 $AE=x$，$AD=2x$，从而进行计算即可解答.

**5. B** 【解析】如图，过点 $D$ 作 $DE\perp AB$，垂足为 $E$. ∵ △$ABC$ 是等边三角形，∴ $AB=BC=AC=2\sqrt{3}$，$\angle A=60°$. 在 Rt△$DEB$ 中，$\tan\angle ABD=\frac{DE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，∴ 设 $DE=\sqrt{3}x$，$BE=5x$. 在 Rt△$ADE$ 中，$AE=\frac{DE}{\tan 60°}=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}}=x$，$AD=\frac{DE}{\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2x$. ∵ $AE+BE=2\sqrt{3}$，∴ $x+5x=2\sqrt{3}$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $AD=2x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ $CD=AC-AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 B.

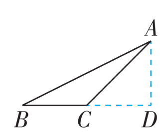
**6. 6 或 2** 【解析】分两种情况讨论：①如图（1），过点 $A$ 作 $AD\perp BC$，垂足为 $D$.

在 Rt△$ADB$ 中，$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，∴ $BD=2AD$.

∵ $AD^2+BD^2=AB^2$，$AB=2\sqrt{5}$，∴ $AD^2+4AD^2=(2\sqrt{5})^2$，解得 $AD=2$ 或 $AD=-2$（不合题意，舍去），∴ $BD=4$. 在 Rt△$ACD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{8-4}=2$，∴ $BC=BD+CD=6$.




图（1）




图（2）

**思路分析◀** 过点 $A$ 作 $AD\perp$ 直线 $BC$，根据 $\angle B$ 的正切值确定 $BD$ 与 $AD$ 的数量关系，再利用勾股定理求出 $AD$ 和 $CD$，最后利用线段的和差关系可得结论.

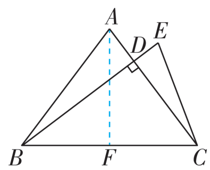
②如图（2），过点 $A$ 作 $AD\perp BC$，交 $BC$ 的延长线于点 $D$. 在 Rt△$ADB$ 中，$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，∴ $BD=2AD$. ∵ $AD^2+BD^2=AB^2$，$AB=2\sqrt{5}$，∴ $AD^2+4AD^2=(2\sqrt{5})^2$，解得 $AD=2$ 或 $AD=-2$（不合题意，舍去），∴ $BD=4$. 在 Rt△$ACD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{8-4}=2$，∴ $BC=BD-CD=2$. 综上，$BC$ 的长为 6 或 2. 故答案为 6 或 2.

**7.** 【解】(1) 过点 $A$ 作 $AF\perp BC$，垂足为 $F$，如图.

∵ $AB=AC=10$，$BC=12$，∴ $BF=FC=\frac{1}{2}BC=6$，

∴ 在 Rt△$ACF$ 中，$AF=\sqrt{AC^2-FC^2}=8$，

$\therefore \tan\angle ACB=\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.




(2) 如图, $\because BD\perp AC$, $\therefore \angle BDC=90°$. 在 Rt$\triangle ACF$ 中, $\sin\angle ACB=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$, $\therefore$ 在 Rt$\triangle BDC$ 中, $\sin\angle BCD=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BD}{12}=\dfrac{4}{5}$, $\therefore BD=\dfrac{48}{5}$, $\therefore CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\dfrac{36}{5}$. 又 $\because \angle BAD=\angle E$, $\angle ADB=\angle EDC=90°$, $\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ECD$, $\therefore \dfrac{AB}{EC}=\dfrac{BD}{CD}$, 即 $\dfrac{10}{EC}=\dfrac{\frac{48}{5}}{\frac{36}{5}}$, $\therefore EC=\dfrac{15}{2}$.

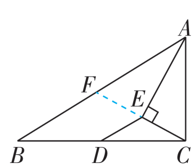
## 刷易错

**8.**【证明】根据题意可设 $a=3k$, $b=4k$, $c=5k(k>0)$. $\because a^2+b^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2=c^2$, $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle C=90°$, 则 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{3k}{5k}=\dfrac{3}{5}$, $\sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{4k}{5k}=\dfrac{4}{5}$, $\therefore \sin A+\sin B=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{5}$.

> **易错警示**
> 题目中没有说明 $\angle C=90°$, 故直接应用正弦的定义是错误的, 应先证明 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle C=90°$ 后才能用正弦的定义.

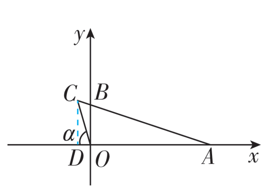
## 刷提升

**1. B**【解析】$\because \angle ACB=90°$, $BC=6$, $\cos B=\dfrac{3}{4}$, $\therefore \dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{4}$, $\therefore AB=\dfrac{4}{3}BC=8$, $\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{7}$. 延长 $CE$ 交 $AB$ 于点 $F$, 如图.




$\because AE$ 平分 $\angle BAC$, $AE\perp CE$, $\therefore \angle EAF=\angle EAC$, $\angle AEC=\angle AEF=90°$. 又 $\because AE=AE$, $\therefore \triangle AFE\cong\triangle ACE(\mathrm{ASA})$, $\therefore AC=AF=2\sqrt{7}$, $CE=EF$, $\therefore$ 点 $E$ 为 $CF$ 的中点. $\because$ 点 $D$ 为 $BC$ 的中点, $\therefore DE=\dfrac{1}{2}BF=\dfrac{1}{2}(AB-AF)=4-\sqrt{7}$. 故选 B.

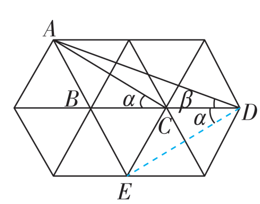
**2. C**【解析】过点 $C$ 作 $CD\perp x$ 轴, 垂足为 $D$, 如图. $\because OC^2=BC\cdot AC$, $\therefore \dfrac{OC}{BC}=\dfrac{AC}{OC}$.



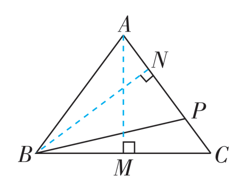

$\because \angle BCO=\angle ACO$, $\therefore \triangle CBO\backsim\triangle COA$, $\therefore \angle CAO=\angle COB$. $\because \angle COB+\angle COD=90°$, $\angle CAO+\angle ABO=90°$, $\therefore \angle COD=\angle ABO=\alpha$. $\because \tan\alpha=3$, $\therefore \tan\angle ABO=\dfrac{AO}{BO}=3$, $\therefore AO=3BO$. 在 Rt$\triangle ABO$ 中, $AO^2+BO^2=AB^2$, $\therefore 9BO^2+BO^2=40$, $\therefore BO=2$(负值已舍去), $\therefore AO=3BO=6$. 在 Rt$\triangle CDO$ 中, $\tan\alpha=\dfrac{CD}{DO}=3$, $\therefore CD=3DO$. $\because \angle BOA=\angle CDO=90°$, $\angle BAO=\angle CAD$, $\therefore \triangle BAO\backsim\triangle CAD$, $\therefore \dfrac{OB}{CD}=\dfrac{AO}{AD}$, $\therefore \dfrac{2}{3DO}=\dfrac{6}{6+OD}$, $\therefore OD=\dfrac{3}{4}$, $\therefore CD=3OD=\dfrac{9}{4}$, $\therefore C\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{9}{4}\right)$. 故选 C.

> **关键点拨**
> 构造出有一个锐角为 $\angle\alpha+\angle\beta$ 的直角三角形是解题的关键.

**3.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$【解析】连接 $DE$, 如图所示. 由题意可知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=120°$, $BA=BC$, $\therefore \angle\alpha=30°$, 同理得 $\angle CDE=\angle CED=30°=\angle\alpha$. 又 $\because \angle AEC=60°$, $\therefore \angle AED=\angle AEC+\angle CED=90°$. 设小正三角形的边长为 $a$, 则 $AE=2a$, $DE=BD\cdot\sin\angle DBE=2a\cdot\sin 60°=\sqrt{3}a$, $\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 故答案为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.




(第 3 题图)

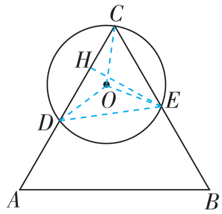



(第 4 题图)

**4.** $\dfrac{24}{5}\leqslant BP\leqslant 6$【解析】如图, 过点 $A$ 作 $BC$ 的垂线, 垂足为 $M$. 在 Rt$\triangle ABM$ 中, $\cos\angle ABC=\dfrac{BM}{AB}$, $\therefore BM=\dfrac{3}{5}\times 5=3$, $\therefore AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. $\because AB=AC$, $\therefore BC=2BM=6$. 过点 $B$ 作 $AC$ 的垂线, 垂足为 $N$. $\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AM=\dfrac{1}{2}AC\cdot BN$, $\therefore BN=\dfrac{BC\cdot AM}{AC}=\dfrac{6\times 4}{5}=\dfrac{24}{5}$, 即 $BP$ 的最小值为 $\dfrac{24}{5}$. 当点 $P$ 在点 $C$ 处时, $BP$ 取得最大值为 6, $\therefore BP$ 长的范围是 $\dfrac{24}{5}\leqslant BP\leqslant$

6. 故答案为$\frac{24}{5}\leqslant BP\leqslant 6$.

**5.** $\sqrt{3}$ 【解析】如图，连接$OC,OE,OD,DE$，过点$E$作$EH\perp AC$于$H$. 设$CD=BE=x$. ∵ $\angle DOE=2\angle ACB=120°$，$OD=OE=OC$，∴ 易得$DE=\sqrt{3}OC$，∴ 当$DE$最小时，$OC$的值最小. 在$\mathrm{Rt}\triangle CEH$中，$\angle EHC=90°$，$EC=6-x$，$\angle ECH=60°$，∴ $CH=\frac{1}{2}EC=3-\frac{1}{2}x$，$EH=EC\cdot\sin 60°=3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x$，∴ $DH=CD-CH=x-\left(3-\frac{1}{2}x\right)=\frac{3}{2}x-3$，∴ $DE=\sqrt{DH^2+EH^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}x-3\right)^2+\left(3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{3x^2-18x+36}=\sqrt{3(x-3)^2+9}$，∴ $x=3$时，$DE$的值最小，最小值为3，∴ $OC$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}DE=\sqrt{3}$. 故答案为$\sqrt{3}$.

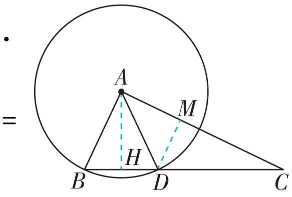



▶关键点拨
连接$OC,OE,OD,DE$，过点$E$作$EH\perp AC$于$H$. 设$CD=BE=x$，得到$DE=\sqrt{3}OC$，可知当$DE$最小时，$OC$的值最小.

**6.** (1)【证明】∵ $AE=AD$，$AF\perp BD$，∴ $EF=DF$.
∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，∴ $AD//BC$.
∵ $EG//BC$，∴ $AD//EG$，∴ $\angle GEF=\angle ADF$.
在$\triangle GEF$和$\triangle ADF$中，$\begin{cases}\angle GEF=\angle ADF,\\ EF=DF,\\ \angle EFG=\angle DFA,\end{cases}$
∴ $\triangle GEF\cong\triangle ADF$(ASA)，∴ $GF=AF$.
∵ $EF=DF$，∴ 四边形$AEGD$是平行四边形.
∵ $AE=AD$，∴ 四边形$AEGD$是菱形.
(2)【解】∵ $AF\perp BD$，$AF=BF$，∴ $\triangle AFB$是等腰直角三角形.
∵ $AB=4$，∴ $AF=BF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4=2\sqrt{2}$.
∵ $\tan\angle AEF=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{AF}{EF}=\frac{1}{2}$，即$\frac{2\sqrt{2}}{EF}=\frac{1}{2}$，∴ $EF=4\sqrt{2}$. ∵ 四边形$AEGD$是菱形，∴ $AG=2AF=4\sqrt{2}$，$ED=2EF=8\sqrt{2}$，
∴ 菱形$AEGD$的面积为$\frac{4\sqrt{2}\times 8\sqrt{2}}{2}=32$.

**刷素养**

**7.**【解】(1)过点$A$作$AH\perp BD$于$H$，如图所示.
∵ 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$BC=6$，$AC=4\sqrt{2}$，∴ $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2$.
∵ $\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$，∴ $AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{2\times 4\sqrt{2}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$，∴ $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2}{3}$. ∵ $AH\perp BD$，∴ $BH=HD=\frac{2}{3}$，∴ $BD=\frac{4}{3}$.




(2)过点$D$作$DM\perp AC$于$M$，如图所示.
由(1)得$AH=\frac{4}{3}\sqrt{2}$，$BD=\frac{4}{3}$，$AB=2$，
∴ $AD=AB=2$，$CD=BC-BD=6-\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$.
∵ $\frac{1}{2}AH\cdot CD=\frac{1}{2}DM\cdot AC$，
∴ $DM=\frac{AH\cdot CD}{AC}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}\times\frac{14}{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{14}{9}$.
在$\mathrm{Rt}\triangle ADM$中，由勾股定理得$AM=\sqrt{AD^2-DM^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{14}{9}\right)^2}=\frac{8}{9}\sqrt{2}$，
∴ $\cos\angle DAC=\frac{AM}{AD}=\frac{\frac{8}{9}\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{9}\sqrt{2}$，即$\angle DAC$的余弦值为$\frac{4}{9}\sqrt{2}$.

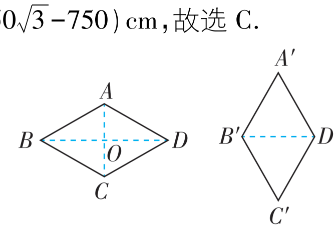
思路分析◀
(1)过点$A$作$AH\perp BD$于$H$，利用等面积法求出$AH$，再利用勾股定理求出$BH$，由垂径定理即可解决问题；
(2)过点$D$作$DM\perp AC$于$M$，利用等面积法求出$DM$，再由勾股定理求出$AM$即可解决问题.

## 28.2.2 应用举例

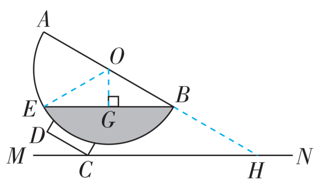
### 课时1 仰角与俯角问题

**刷基础**

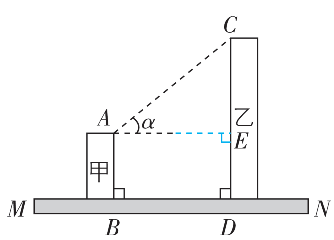
**1.** C 【解析】如图，连接$BD,AC$交于点$O$，连接$B'D'$，∴ $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAD=60°$，∴ $OB=AB\cdot\sin 60°=30\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$(cm)，∴ $BD=2OB=30\sqrt{3}$ cm，∴ 校门关闭时，伸缩门的宽度为$30\sqrt{3}\times 25=750\sqrt{3}$(cm). ∵ 校门部分打开时，每个菱形中的原120°的角缩小为60°，∴ $B'D'=A'B'=30$ cm，∴ 校门部分打开时，伸缩门的宽度为$30\times 25=750$(cm)，∴ 校门打开了$(750\sqrt{3}-750)$cm，故选C.



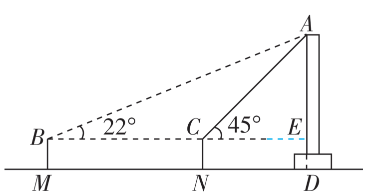
**2.** $5\sqrt{3}$ 【解析】如图，延长 $AB$ 与 $MN$ 交于点 $H$，设 $AB$ 的中点为 $O$，连接 $OE$，过 $O$ 点作 $OG\perp BE$ 于点 $G$，则点 $O$ 为半圆的圆心. ∵ $CD$ 与 $MN$ 成 $30°$ 角，$CD/\!/AB$，∴ $\angle AHC=30°$. ∵ $BE/\!/MN$，∴ $\angle ABE=30°$. ∵ $OE=OB$，∴ $\angle BOE=120°$. ∵ $AB=10$ cm，∴ $OB=OE=5$ cm. 在 Rt△$OBG$ 中，$BG=OB\cdot\cos\angle ABE=5\times\cos 30°=\frac{5\sqrt{3}}{2}$(cm). ∵ $OG\perp BE$，∴ $BE=2BG=5\sqrt{3}$ cm，故答案为 $5\sqrt{3}$.




**3.** C 【解析】过点 $A$ 作 $AE\perp CD$，垂足为 $E$，如图. 由题意得 $AB=ED=20$ m，$AE=BD=35$ m. 在 Rt△$AEC$ 中，$\angle CAE=\alpha$，∴ $CE=AE\cdot\tan\alpha=35\tan\alpha$ m，∴ $CD=CE+DE=(20+35\tan\alpha)$ m，故选 C.

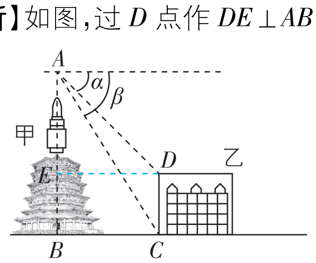



**4.** 【解】如图，延长 $BC$ 交 $AD$ 于点 $E$.




由题意得 $BE\perp AD$，$BM=CN=ED=1.6$ 米，$BC=MN=24$ 米. 设 $CE=x$ 米. ∵ $\angle ACE=45°$，∴ $AE=CE=x$ 米，∴ $BE=BC+CE=(x+24)$ 米. 在 Rt△$ABE$ 中，∵ $\angle ABE=22°$，∴ $AE=BE\cdot\tan 22°\approx 0.4(x+24)$ 米，∴ $x=0.4(x+24)$，解得 $x=16$，∴ $AD=AE+DE=16+1.6=17.6$(米). ∴ 建筑物 $AD$ 的高度约为 17.6 米.

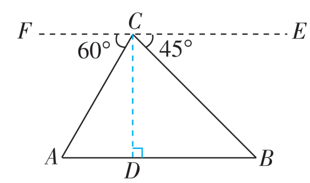
**5.** C 【解析】如图，过 $D$ 点作 $DE\perp AB$ 于点 $E$.




设 $AE=x$ m. 根据题意可得 $AB\perp BC$，$DC\perp BC$，∴ $\angle AED=\angle BED=\angle ABC=\angle DCB=90°$，∴ 四边形 $BCDE$ 是矩形. ∵ 从甲建筑物的顶端 $A$ 点处测得乙建筑物的顶端 $D$ 点的俯角 $\alpha$ 为 $45°$，底端 $C$ 点的俯角 $\beta$ 为 $58°$，$BC$ 为两座建筑物的水平距离，乙建筑物的高度 $CD$ 为 6 m，∴ $BE=CD=6$ m，$\angle ADE=45°$，$\angle ACB=58°$. 在 Rt△$ADE$ 中，$\angle ADE=45°$，∴ $\angle EAD=90°-\angle ADE=45°$，∴ $\angle EAD=\angle ADE$，∴ $DE=AE=x$ m，∴ $BC=DE=x$ m，∴ $AB=AE+BE=(x+6)$ m. 在 Rt△$ABC$ 中，$\tan\angle ACB=\frac{AB}{BC}$，即 $\tan 58°=\frac{x+6}{x}\approx 1.60$，解得 $x=10$，经检验，$x=10$ 是原分式方程的解且符合题意，∴ $AB=x+6=16$ m. 故选 C.

**思路分析** 过点 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于点 $D$，根据平行线的性质得出 $\angle A=\angle ACF=60°$，$\angle B=\angle BCE=45°$，再根据三角函数的定义求出结果即可.

**6.** $\left(\frac{100\sqrt{3}}{3}+100\right)$ 【解析】过点 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于点 $D$，如图所示，则 $\angle CDA=\angle CDB=90°$，$CD=100$ m. ∵ $EF/\!/AB$，∴ $\angle A=\angle ACF=60°$，$\angle B=\angle BCE=45°$，∴ $AD=\frac{CD}{\tan 60°}=\frac{100}{\sqrt{3}}=\frac{100\sqrt{3}}{3}$(m)，$BD=\frac{CD}{\tan 45°}=\frac{100}{1}=100$(m)，∴ $AB=AD+BD=\left(\frac{100\sqrt{3}}{3}+100\right)$ m. 故答案为 $\left(\frac{100\sqrt{3}}{3}+100\right)$.

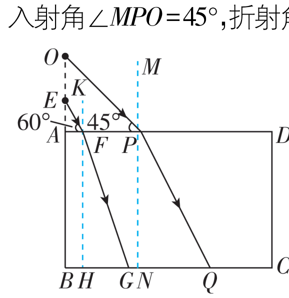



## 刷提升

**关键点拨** 根据三角函数的定义得出 $OB$ 的长，进而得出 $OB'$ 的长，利用 $BB'=OB'-OB$ 进一步求解即可.

**1.** D 【解析】∵ 一根 3 米长的竹竿 $AB$ 斜靠在墙边($\angle O=90°$)，倾斜角为 $\alpha$，∴ $\cos\alpha=\frac{OB}{AB}$，∴ $OB=AB\cdot\cos\alpha=3\cos\alpha$ 米，同理可得 $OB'=A'B'\cdot\cos\beta=3\cos\beta$ 米，∴ $BB'=OB'-OB=(3\cos\beta-3\cos\alpha)$ 米. 故选 D.

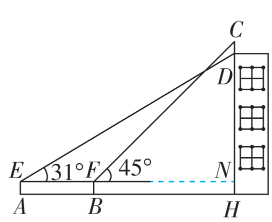
**2.** $\frac{3}{2}$ $\sqrt{7}+1$ 【解析】如图，过 $P$ 点作 $MN\perp BC$ 于 $N$ 点，∴ 入射角 $\angle MPO=45°$，折射角为 $\angle QPN$.



$\because$ 在 Rt$\triangle OAP$ 中，$OA=4$，$\angle OPA=45°$，$\therefore AP=OA=4$，$\therefore BN=4$. $\because BQ=8$，$\therefore NQ=BQ-BN=4$. $\because$ 在 Rt$\triangle NQP$ 中，$PN=AB=2\sqrt{14}$，$\therefore PQ^2=NQ^2+PN^2=72$，$\therefore PQ=6\sqrt{2}$，$\therefore \sin\angle QPN=\dfrac{NQ}{PQ}=\dfrac{4}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. $\because \sin\angle MPO=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ 相对折射率 $n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\div\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{3}{2}$. 过 $F$ 点作 $KH\perp BC$ 于 $H$ 点，$\therefore$ 入射角 $\angle KFE=30°$，折射角为 $\angle GFH$. $\because$ 在 Rt$\triangle AEF$ 中，$AE=\sqrt{3}$，$\angle AFE=60°$，$\therefore AF=\dfrac{AE}{\tan\angle AFE}=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$，$\therefore BH=1$. $\because$ 相对折射率 $n=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{\sin\angle KFE}{\sin\angle GFH}=\dfrac{3}{2}$，即 $\dfrac{\sin 30°}{\sin\angle GFH}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \sin\angle GFH=\dfrac{1}{3}$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle GFH$ 中，$\sin\angle GFH=\dfrac{GH}{GF}=\dfrac{1}{3}$. 令 $GH=x$，则 $GF=3x$. 又 $\because FH=AB=2\sqrt{14}$，$GF^2=GH^2+FH^2$，$\therefore 9x^2=x^2+56$，解得 $x=\sqrt{7}$（负值已舍去），即 $GH=\sqrt{7}$，$\therefore BG=GH+BH=\sqrt{7}+1$. 故答案为 $\dfrac{3}{2}$，$\sqrt{7}+1$.

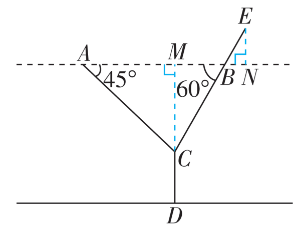
思路分析
过 $P$ 点作 $MN\perp BC$ 于 $N$，计算出入射角和折射角的正弦值的比值，即可得到相对折射率；利用相对折射率，求出光线 $EF$ 的折射角的正弦值，在 Rt$\triangle GFH$ 中，求出 $HG$ 的长，即可得到结果.

**3.**【解】能. 延长 $EF$ 交 $CH$ 于 $N$，如图所示，则 $\angle CNF=90°$. $\because \angle CFN=45°$，$\therefore CN=NF$. 设 $DN=x$ m，则 $NF=CN=(x+3)$ m，$\therefore EN=5+(x+3)=(x+8)$ m. 在 Rt$\triangle DEN$ 中，$\tan\angle DEN=\dfrac{DN}{EN}$，$\therefore DN=EN\cdot\tan\angle DEN$，$\therefore x\approx(x+8)\times0.6$，解得 $x=12$，$\therefore DH=DN+NH=12+1.2=13.2$(m).




答：点 $D$ 到地面的距离 $DH$ 的长约为 13.2 m.

**4.**【解】(1) 如图，过点 $C$ 作 $CM\perp AB$ 于点 $M$，则 $\angle CMA=\angle CMB=90°$. $\because \angle CAM=45°$，$\angle CBM=60°$，$\therefore AM=CM$，$BM=\dfrac{CM}{\tan 60°}$. $\because AB=54$ cm，$\therefore CM+\dfrac{CM}{\tan 60°}=54$，$\therefore CM=27(3-\sqrt{3})\approx34.3$(cm)，$\therefore$ 点 $C$ 到 $AB$ 的距离约为 34.3 cm.

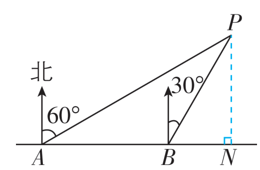



(2) $\because E$ 到地面的距离为 70 cm 时，茜茜骑乘该自行车最舒适，$\therefore$ 此时点 $E$ 到 $AB$ 的距离为 $70-30-34.3=5.7$(cm). 如图，过点 $E$ 作 $EN\perp AB$ 于点 $N$，则 $EN=5.7$ cm，$\angle ENB=90°$.
$\because \angle EBN=\angle CBM=60°$，
$\therefore BE=\dfrac{EN}{\sin 60°}=\dfrac{5.7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx6.6$(cm). $\because$ 原 $BE$ 为 4 cm，$\therefore$ 需将 $BE$ 伸长 $6.6-4=2.6$(cm).
答：如果要达到最佳舒适高度，茜茜应该将 $BE$ 伸长约 2.6 cm.

## 课时 2　方位角、坡度问题

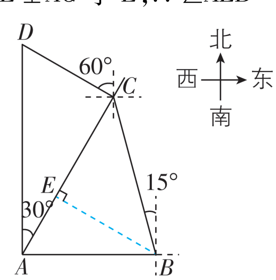
**刷基础**

**1. B**　【解析】作 $PN\perp AB$ 交 $AB$ 的延长线于点 $N$，如图. 根据题意可得 $\angle PAB=30°$，$\angle PBN=60°$. $\because \angle BPA=\angle PBN-\angle PAB=30°=\angle BAP$，$\therefore AB=BP$. 设该船的速度为 $x$ 单位长度/h，则 $BP=AB=2x$. $\because$ 在 Rt$\triangle BPN$ 中，$\angle PBN=60°$，$\therefore BN=BP\cdot\cos\angle PBN=\dfrac{1}{2}BP=x$，$\therefore$ 游船由 $B$ 处继续航行到达离灯塔 $P$ 距离最近的位置所需时间是 1 h，$\therefore$ 游船继续航行到达离灯塔 $P$ 距离最近的位置的时间为上午 11:00，故选 B.



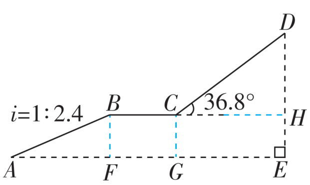

思路分析
条件集中在 $\triangle ABC$ 中，但 $\triangle ABC$ 不是直角三角形，由于 $\angle CAB=60°$，所以需作高构造直角三角形，然后分别解直角三角形.

**2.**【解】如图，过点 $B$ 作 $BE\perp AC$ 于 $E$，$\therefore \angle AEB=\angle BEC=90°$. 由题意得，$\angle CAB=90°-30°=60°$，$\angle ABC=90°-15°=75°$，$\therefore \angle ACB=180°-\angle CAB-\angle ABC=180°-60°-75°=45°$，$\angle ABE=90°-\angle BAC=30°$. 在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\angle AEB=90°$，$AB=2$ 千米，$\therefore AE=AB\cdot\cos\angle BAE=\dfrac{1}{2}AB=1$ 千米，$\therefore BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3}$ 千米.

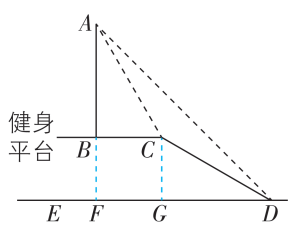



在 Rt$\triangle BCE$ 中，$\angle BEC=90°$，$\angle BCE=45°$，$\therefore \triangle BCE$ 是等腰直角三角形，$\therefore CE=BE=\sqrt{3}$ 千米，$\therefore AC=AE+CE=(1+\sqrt{3})$ 千米.

**3.** 50 m　320 m　【解析】如图,过点 $B$ 作 $BF\perp AE$ 于 $F$,过点 $C$ 作 $CG\perp AE$ 于 $G$,延长 $BC$ 交 $DE$ 于 $H$. 设 $BF=x$ m. ∵ 坡道 $AB$ 的坡度为 $1:2.4$,∴ $AF=2.4x$ m. 在 Rt△$ABF$ 中,$AB^2=BF^2+AF^2$,即 $130^2=x^2+(2.4x)^2$,解得 $x=50$(负值已舍去),∴ 小明到达点 $B$ 时,他沿竖直方向上升的高度为 50 m,$AF=2.4x=120$ m. 易得四边形 $BFGC$ 为矩形,∴ $FG=BC=80$ m,$CG=BF=50$ m. 在 Rt△$DCH$ 中,$CD=150$ m,$\angle DCH=36.8°$,则 $CH=CD\cdot\cos\angle DCH\approx150\times0.80=120$(m). 由题易得四边形 $CGEH$ 是矩形,∴ $CH=GE=120$ m,∴ $AE=AF+FG+GE=120+80+120=320$(m),即点 $A,D$ 间的水平距离 $AE$ 长约为 320 m.




**4.** $(3+3\sqrt{3})$ 米　【解析】如图,过点 $B$ 作 $BF\perp DE$ 于点 $F$,过点 $C$ 作 $CG\perp DE$ 于点 $G$. 由题意得 $CD=6$ 米,$\angle ADF=45°$,$\angle ACB=60°$,$CG=BF$,$BC=FG$. ∵ 斜坡 $CD$ 的坡度 $i=1:\sqrt{3}$,∴ $\frac{CG}{DG}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,∴ $DG=\sqrt{3}CG$. 在 Rt△$CDG$ 中,由勾股定理得 $CG^2+(\sqrt{3}CG)^2=6^2$,解得 $CG=3$(负值已舍去),∴ $DG=3\sqrt{3}$ 米,$BF=3$ 米. 设 $BC=FG=x$ 米,则 $DF=(x+3\sqrt{3})$ 米. 在 Rt△$ABC$ 中,$\tan60°=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{x}=\sqrt{3}$,∴ $AB=\sqrt{3}x$ 米. 易知 $A,B,F$ 三点在同一直线上,∴ $AF=BF+AB=(3+\sqrt{3}x)$ 米. 在Rt△$ADF$ 中,$\angle ADF=45°$,∴ $AF=DF$,即 $3+\sqrt{3}x=x+3\sqrt{3}$,解得 $x=3$,∴ $AF=(3+3\sqrt{3})$ 米,即灯的顶端 $A$ 到地面 $DE$ 的距离为 $(3+3\sqrt{3})$ 米.

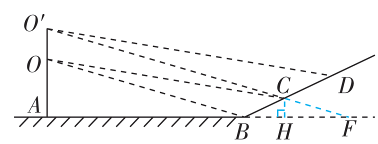



▶思路分析　作辅助线构造直角三角形 $CDG$,求出 $CG$,$DG$. 设 $BC=FG=x$ 米,表示出 $AB$,由题可知 $AF=DF$,由此列方程求出 $BC$,从而求出 $AF$ 的长.

**5.**【解】作 $EF\perp CD$ 交 $CD$ 的延长线于 $F$,作 $EG\perp BC$ 于 $G$. 在 Rt△$DEF$ 中,设 $EF=x$ 米. ∵ $i=1:2.4$,∴ $DF=2.4x$ 米,∴ $DE=\sqrt{EF^2+DF^2}=2.6x$ 米,∴ $2.6x=78$,∴ $x=30$,∴ $DF=2.4x=72$ 米,$CG=EF=30$ 米,∴ $GE=FC=DF+CD=72+78=150$(米). 在 Rt△$AEG$ 中,$AG=EG\cdot\tan\angle AEG\approx150\times0.93=139.5$(米),∴ $AB=AG+CG-BC=139.5+30-144.5=25$(米).
答:信号塔 $AB$ 的高度约为 25 米.

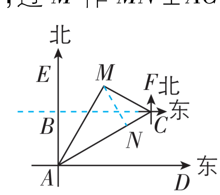
## 刷提升

**1. B**　【解析】由题意,得 $OA\perp AB$,$OB/\!/O'C$,$OC/\!/O'D$,$OA=1.5$,$OO'=0.9$,$AB=5$,∴ $O'A=1.5+0.9=2.4$,$OB=\sqrt{AB^2+OA^2}=\frac{\sqrt{109}}{2}$,$\angle OBC=\angle O'CD$,$\angle O'DC=\angle OCB$,∴ △$OBC$∽△$O'CD$,∴ $\frac{O'C}{OB}=\frac{CD}{BC}=\frac{6}{5}$,∴ $O'C=\frac{6}{5}OB=\frac{3\sqrt{109}}{5}$. 如图,延长 $O'C$ 交 $AB$ 的延长线于点 $F$,作 $CH\perp AB$ 交 $AB$ 的延长线于点 $H$,则 $CH/\!/O'A$.



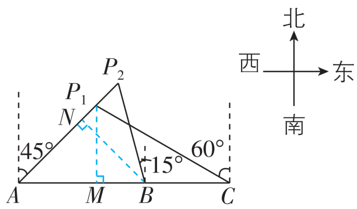

∵ $O'C/\!/OB$,∴ △$OAB$∽△$O'AF$,∴ $\frac{O'F}{OB}=\frac{AF}{AB}=\frac{O'A}{OA}=\frac{2.4}{1.5}=\frac{8}{5}$,∴ $O'F=\frac{8}{5}OB=\frac{4\sqrt{109}}{5}$,$AF=\frac{8}{5}AB=8$,∴ $CF=O'F-O'C=\frac{\sqrt{109}}{5}$,$BF=AF-AB=3$. ∵ $CH/\!/O'A$,∴ △$FHC$∽△$FAO'$,∴ $\frac{HF}{AF}=\frac{CH}{O'A}=\frac{CF}{O'F}=\frac{1}{4}$,∴ $CH=\frac{1}{4}O'A=0.6$,$HF=\frac{1}{4}AF=2$,∴ $BH=BF-FH=1$,∴ $\frac{CH}{BH}=\frac{0.6}{1}=\frac{3}{5}$,即斜坡 $BD$ 的坡比为 3∶5. 故选 B.

**2.** 1 500　【解析】如图,过 $C$ 作东西方向线,交过 $A$ 的南北方向线 $AE$ 于 $B$,过 $M$ 作 $MN\perp AC$ 于 $N$,则此时铺设的管道最短. ∵ $\angle EAC=60°$,$\angle EAM=30°$,∴ $\angle CAM=30°$,∴ $\angle AMN=60°$. 又 ∵ $\angle FCM=60°$,∴ $\angle MCB=30°$. ∵ $\angle EAC=60°$,∴ $\angle CAD=30°$,∴ $\angle BCA=30°$,∴ $\angle MCA=\angle MCB+\angle BCA=60°$,∴ $\angle AMC=90°$,$\angle CMN=30°$,∴ $MC=\frac{1}{2}AC=1\ 000$ 米,∴ $NC=\frac{1}{2}MC=500$ 米,∴ $AN=AC-NC=2\ 000-500=1\ 500$(米),即到小区 $M$ 铺设的管道最短时,$AN$ 的长为 1 500 米. 故答案为 1 500.




思路分析◀　过 $C$ 作东西方向线,交过 $A$ 的南北方向线 $AE$ 于 $B$,过 $M$ 作 $MN\perp AC$ 于 $N$,此时铺设的管道最短,根据题意可得 $\angle AMC=90°$,再求得 $NC$ 的长,进而求得 $AN$ 的长.

**3.**【解】(1)如图,作 $P_1M\perp AC$ 于 $M$. 设 $P_1M=x$ m. 在 Rt△$P_1AM$ 中,∵ ∠$P_1AB=45°$,∴ $AM=P_1M=x$ m. 在 Rt△$P_1CM$ 中,∵ ∠$P_1CA=30°$,∴ $MC=\sqrt{3}P_1M=\sqrt{3}x$ m. ∵ $AC=900+600=1\ 500$(m),∴ $x+\sqrt{3}x=1\ 500$,∴ $x=750(\sqrt{3}-1)$,∴ $AP_1=\sqrt{2}x=750(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m. 即 $A$ 处到农家乐 $P_1$ 处的距离为 $750(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m.

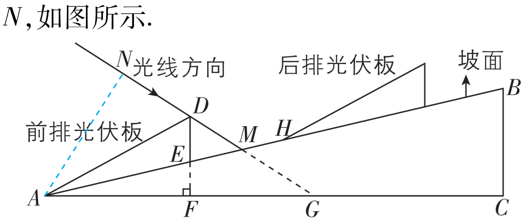



(2)由(1)可得 $CP_1=2P_1M=1\ 500(\sqrt{3}-1)$m,∴ 小巴从 $C$ 处沿 $CP_1$ 方向乘游艇前往 $P_1$ 的时间为 $\dfrac{1\ 500(\sqrt{3}-1)}{200}=\dfrac{15}{2}(\sqrt{3}-1)$ min. 如图,作 $BN\perp AP_2$ 于 $N$. ∵ ∠$P_2AB=45°$, ∠$P_2BA=75°$,∴ ∠$P_2=60°$. 在 Rt△$ABN$ 中,∵ ∠$P_1AB=45°$, $AB=900$ m,∴ $BN=AN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=450\sqrt{2}$ m,∴ $P_1N=AP_1-AN=750(\sqrt{6}-\sqrt{2})-450\sqrt{2}=(750\sqrt{6}-1\ 200\sqrt{2})$ m. 在 Rt△$P_2BN$ 中,∠$P_2=60°$,∴ $P_2N=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times450\sqrt{2}=150\sqrt{6}$(m),∴ $P_1P_2=P_2N-NP_1=150\sqrt{6}-(750\sqrt{6}-1\ 200\sqrt{2})=(1\ 200\sqrt{2}-600\sqrt{6})$m,∴ 小川从游客中心 $P_2$ 沿 $P_2P_1$ 方向步行前往 $P_1$ 的时间为 $\dfrac{1\ 200\sqrt{2}-600\sqrt{6}}{80}=\left(15\sqrt{2}-\dfrac{15}{2}\sqrt{6}\right)$min. ∵ $\dfrac{15}{2}(\sqrt{3}-1)>\left(15\sqrt{2}-\dfrac{15}{2}\sqrt{6}\right)$,∴ 小川先到达.

**刷素养**

**4.**【解】(1)在 Rt△$ADF$ 中, cos∠$DAF=\dfrac{AF}{AD}$,∴ $AF=AD\cdot\cos∠DAF=100\times\cos 28°\approx100\times0.88=88$(cm). 在 Rt△$AEF$ 中,cos∠$EAF=\dfrac{AF}{AE}$,∴ $AE=\dfrac{AF}{\cos∠EAF}=\dfrac{88}{\cos 13°}\approx\dfrac{88}{0.97}\approx91$(cm).

(2)设 $DG$ 交 $AB$ 于 $M$,过点 $A$ 作 $AN\perp DG$ 于 $N$,如图所示.




在 Rt△$ADF$ 中,$DF=AD\cdot\sin∠DAC=100\times\sin 28°\approx100\times0.47=47$(cm).

在 Rt△$DFG$ 中,$\tan∠DGA=\dfrac{DF}{FG}$,∴ $\tan 32°=\dfrac{47}{FG}$,∴ $FG=\dfrac{47}{\tan 32°}\approx\dfrac{47}{0.62}\approx75.8$(cm),

∴ $AG=AF+FG=88+75.8=163.8$(cm).

在 Rt△$AGN$ 中,$AN=AG\cdot\sin∠DGA=163.8\times\sin 32°\approx163.8\times0.53\approx86.8$(cm).

∵ ∠$AMN$=∠$MAG$+∠$DGA=13°+32°=45°$,

∴ △$AMN$ 为等腰直角三角形,∴ $AM=\sqrt{2}AN\approx1.41\times86.8\approx122.4$(cm),∴ $EM=AM-AE=122.4-91=31.4$(cm). ∵ 当 $M,H$ 重合时,$EH$ 最小,∴ $EH$ 最小约为 32 cm.

**思路分析**

(1)在Rt△$ADF$中,由锐角三角函数定义求出 $AF$ 的长,再在Rt△$AEF$中,由锐角三角函数定义求出 $AE$ 的长即可;

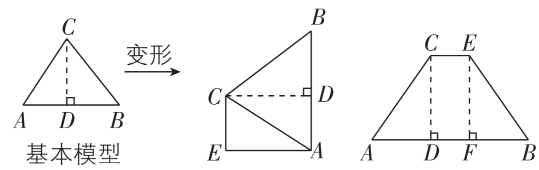
(2)设 $DG$ 交 $AB$ 于 $M$,过点 $A$ 作 $AN\perp DG$ 于 $N$,由锐角三角函数定义求出 $DF$,$FG$ 的长,得出 $AG$ 的长,再由锐角三角函数定义求出 $AN$ 的长,然后证出△$AMN$ 为等腰直角三角形,得 $AM$ 的长,由 $EM=AM-AE$,即可得出答案.

## 大招专题5　锐角三角函数应用的常见模型

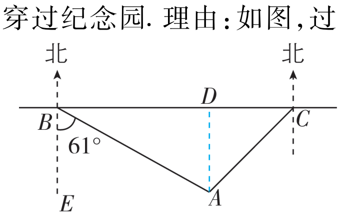
**刷难关**

**大招解读｜背靠背型**

通过在三角形内作高,构造出两个直角三角形求解,高为两个直角三角形的公共边.图形模型如下:




**1.**【解】该公路不会穿过纪念园. 理由:如图,过点 $A$ 作 $AD\perp BC$,垂足为点 $D$. 由题意得 ∠$ACD=45°$, ∠$ABE=61°$,

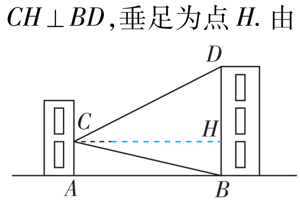



$BC=2.8$ km,$AD$∥$BE$,∴ ∠$ABE$=∠$DAB=61°$. 设 $AD=x$ km. 在 Rt△$ABD$ 中,$BD=AD\cdot\tan 61°\approx1.8x$ km. 在 Rt△$ACD$ 中,$CD=\dfrac{AD}{\tan 45°}=x$ km. ∵ $BD+CD=BC$,∴ $1.8x+x=2.8$,解得 $x=1$,∴ $AD=1$ km $=1\ 000$ m. ∵ 1 000 m>900 m,∴ 该公路不会穿过纪念园.

**关键点拨**

过点 $C$ 作 $CH\perp BD$,垂足为点 $H$,根据锐角三角函数的定义即可求解.

**2.**【解】如图,过点 $C$ 作 $CH\perp BD$,垂足为点 $H$. 由题意,得 ∠$DCH=27°$,∠$HCB=13°$,$AB=CH=15$ 米. 在 Rt△$DHC$ 中,




∵ $\tan∠DCH=\dfrac{DH}{CH}$,

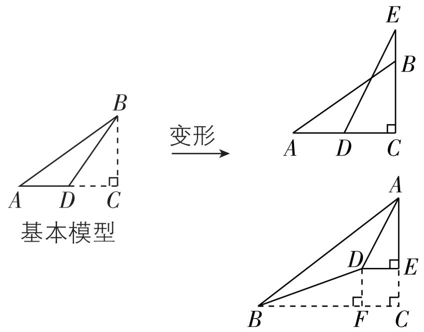
∴ $DH=\tan 27°\times15\approx7.65$(米).

在 Rt△$HCB$ 中,∵ $\tan∠HCB=\dfrac{HB}{CH}$,∴ $BH=\tan 13°\times15\approx3.45$(米),∴ $BD=HD+HB=7.65+3.45=11.1$(米).

答:教学楼 $BD$ 的高度约为 11.1 米.

**大招解读｜子母型**

通过在三角形外作高，构造出两个直角三角形求解，高为两个直角三角形的公共边. 图形模型如下：




**3.**【解】设 $AB=x$ m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\because \tan\angle ACB=\frac{AB}{BC}$，$\therefore \tan 52°=\frac{x}{BC}$，$\therefore BC=\frac{x}{\tan 52°}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\because \tan\angle ADB=\frac{AB}{BD}$，$\therefore \tan 60°=\frac{x}{BD}$，$\therefore BD=\frac{x}{\sqrt{3}}$. $\because CD=CB-DB$，$\therefore \frac{x}{\tan 52°}-\frac{x}{\sqrt{3}}=20$，解得 $x\approx 98$，$\therefore$ 高度 $AB$ 约为 98 m.

**4.** $(10+40\sqrt{3})$ 米 【解析】设 $BC$ 为 $x$ 米，则 $AC=(20+x)$ 米. 由题意知 $\angle DBC=\angle AEC=60°$，$DE=80$ 米. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DBC$ 中，$\tan 60°=\frac{DC}{BC}=\frac{DC}{x}$，则 $DC=\sqrt{3}x$ 米，$\therefore CE=(\sqrt{3}x-80)$ 米. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\tan 60°=\frac{AC}{CE}=\frac{20+x}{\sqrt{3}x-80}=\sqrt{3}$，解得 $x=10+40\sqrt{3}$. 经检验，$x=10+40\sqrt{3}$ 为原方程的解，故答案为 $(10+40\sqrt{3})$ 米.

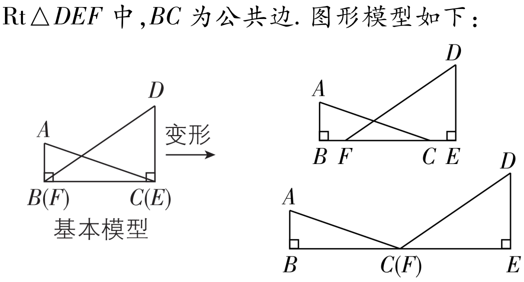
**关键点拨** 设 $BC$ 为 $x$ 米，则 $AC=(20+x)$ 米，利用锐角三角函数的定义列出关于 $x$ 的方程，解方程求得结果.

**5.**【解】根据题意知，四边形 $AA_1B_1O$ 和四边形 $BB_1C_1B_2$ 均为矩形，$\therefore OB_1=AA_1=62$ m，$B_2C_1=BB_1=200$ m，$\therefore BO=BB_1-OB_1=200-62=138$ (m)，$CB_2=CC_1-B_2C_1=550-200=350$ (m). 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=90°$，$\angle BAO=30°$，$BO=138$ m，$\therefore AB=2BO=2\times 138=276$ (m). 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBB_2$ 中，$\angle CB_2B=90°$，$\angle CBB_2=45°$，$CB_2=350$ m，$\therefore BC=\sqrt{2}CB_2=350\sqrt{2}$ m，$\therefore AB+BC=(276+350\sqrt{2})$ m，即管道 $AB$ 和 $BC$ 的总长度为 $(276+350\sqrt{2})$ m.

**思路分析** 先根据题意得到 $BO$，$CB_2$ 的长，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，由锐角三角函数可得 $AB$ 的长度，在 $\mathrm{Rt}\triangle CBB_2$ 中，由锐角三角函数可得 $BC$ 的长度，再相加即可得到答案.

**大招解读｜拥抱型**

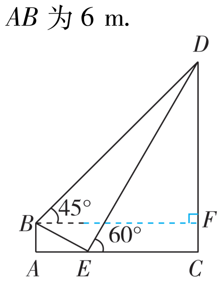
如图，分别解两个直角三角形，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，$BC$ 为公共边. 图形模型如下：




**6.**【解】(1) $\because$ 斜坡 $BE$ 的坡度 $i=1:\sqrt{3}$，$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \tan\angle BEA=\frac{AB}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle BEA=30°$. $\because BE=12$ m，$\therefore AB=\frac{1}{2}BE=6$ m.

答：点 $B$ 到水平地面的高度 $AB$ 为 6 m.

(2) 如图，过点 $B$ 作 $BF\perp CD$ 于 $F$，则 $\angle C=\angle A=\angle BFC=90°$，$\therefore$ 四边形 $BFCA$ 是矩形，$\therefore AB=CF=6$ m，$BF=AC$. 设 $DF=x$ m，则 $DC=DF+CF=(x+6)$ m.




$\because \tan\angle DEC=\frac{DC}{EC}$，$\therefore EC=\frac{x+6}{\tan 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+6)$ m.

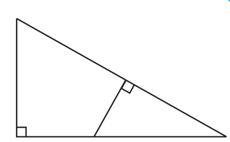
在 $\mathrm{Rt}\triangle DBF$ 中，$\angle DBF=45°$，$\tan\angle DBF=\frac{DF}{BF}$，$\therefore BF=\frac{DF}{\tan\angle DBF}=x$ m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=6\sqrt{3}$ m.

$\because BF=AC=AE+EC$，$\therefore 6\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}(x+6)=x$，$\therefore x=12\sqrt{3}+12$，$\therefore CD=DF+CF=12\sqrt{3}+12+6=(12\sqrt{3}+18)$ m.

答：电线塔 $CD$ 的高度为 $(12\sqrt{3}+18)$ m.

**大招解读｜斜截型**

斜截型多呈现为拦截问题、安全问题. 此类型的特点是小的直角三角形在大的直角三角形内部，有公共的锐角，小的直角三角形的斜边与大的直角三角形的直角边在同一直线上，小的直角三角形的直角边与大的直角三角形的斜边在同一直线上，如图.

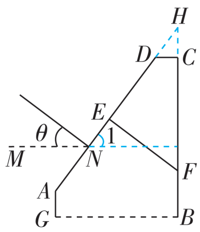


**7.**【解】小亮说的对. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=90°$，$\angle BAD=18°$，$BA=10$ m，$\tan\angle BAD=\frac{BD}{BA}$，$\therefore BD=10\times\tan 18°\approx 3.25$ (m)，$\therefore CD=BD-BC=3.25-0.5=2.75$ (m). $\because \angle CDE+\angle BAD=90°$，$\therefore \angle CDE=90°-\angle BAD=72°$. $\because CE\perp AD$，$\therefore \sin\angle CDE=\frac{CE}{CD}$，$\therefore CE=CD\times\sin\angle CDE=2.75\times\sin 72°\approx 2.6$ (m)，

$\therefore$ 正确的限制高度约为 2.6 m.

**8.**【解】如图，延长 $ED$ 交 $BC$ 的延长线于点 $H$，延长 $MN$. $\because \theta=37°$，$\therefore \angle 1=90°-37°=53°$，

$\therefore \angle H=90^\circ-\angle 1=37^\circ$. 在 Rt$\triangle CDH$ 中, $HC=\dfrac{CD}{\tan 37^\circ}$, $\therefore HF=HC+CF=\dfrac{CD}{\tan 37^\circ}+CF$, $\therefore$ 在 Rt$\triangle EFH$ 中, $EF=\left(\dfrac{CD}{\tan 37^\circ}+CF\right)\cdot\sin 37^\circ\approx\left(\dfrac{20}{\frac{3}{4}}+100\right)\times\dfrac{3}{5}=76$ (cm).




答: $EF$ 的长约为 76 cm.

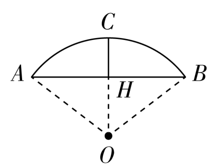
**关键点拨** 延长 $ED$ 交 $BC$ 的延长线于点 $H$, 延长 $MN$, 则 $\angle H=37^\circ$, 然后利用锐角三角函数即可求出答案.

## 全章综合训练

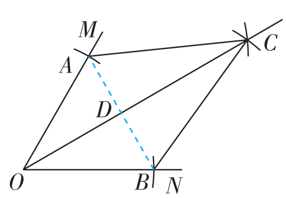
**刷中考**

**1. B** 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=7$, $AC=3$, $\therefore \sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{7}$, 故选 B.

**2.** $\dfrac{4}{5}$ 【解析】如图, 由题意得 $OH\perp AB$, $AB=8$, $HC=2$. 设 $OA=x$, 则 $OC=x$, $\therefore OH=x-2$. $\because OH\perp AB$, $\therefore AH=BH=\dfrac{1}{2}AB=4$. 在 Rt$\triangle OAH$ 中, 由勾股定理得 $AH^2+OH^2=OA^2$, $\therefore 4^2+(x-2)^2=x^2$, 解得 $x=5$, $\therefore OA=5$, $\therefore \cos\angle OAB=\dfrac{AH}{OA}=\dfrac{4}{5}$. 故答案为 $\dfrac{4}{5}$.

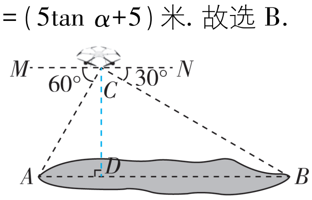



**3.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】如图, 连接 $AB$, 交 $OC$ 于点 $D$. 由题意得 $OA=OB=2$, $AC=BC=\sqrt{6}$, $\therefore OC$ 垂直平分 $AB$, $\therefore OC\perp AB$, $BD=\dfrac{1}{2}AB$. $\because \angle MON=60^\circ$, $\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形, $\therefore AB=OA=2$, $\therefore BD=1$, $\therefore CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{5}$, $\therefore$ 在 Rt$\triangle BCD$ 中, $\tan\angle BCO=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 故答案为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

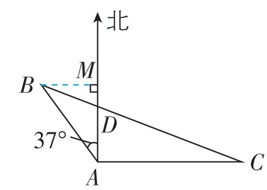



**4. B** 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=\alpha$, $AC=5$ 米, $\therefore BC=AC\cdot\tan\alpha$, $\therefore BC=5\tan\alpha$ 米, $\therefore$ 地毯的长度为 $BC+AC=(5\tan\alpha+5)$ 米. 故选 B.

**5.** $120\sqrt{3}$ 【解析】如图, 过点 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于点 $D$. 由题意得 $CD=90$ m. $\because \angle MCA=60^\circ$, $\angle NCB=30^\circ$, $MN\parallel AB$, $\therefore \angle CAD=\angle MCA=60^\circ$, $\angle CBD=\angle NCB=30^\circ$. $\because CD\perp AB$, $\therefore \angle CDA=\angle CDB=90^\circ$, $\therefore AD=\dfrac{CD}{\tan\angle CAD}=\dfrac{90}{\sqrt{3}}=30\sqrt{3}$ (m), $BD=\dfrac{CD}{\tan\angle CBD}=\dfrac{90}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=90\sqrt{3}$ (m), $\therefore AB=AD+BD=120\sqrt{3}$ m. 故答案为 $120\sqrt{3}$.




**6.** 【解】(1) 如图, 过点 $B$ 作 $BM\perp AD$, 垂足为 $M$. $\because AC\perp AD$, $\therefore BM\parallel AC$, $\therefore \triangle BDM\backsim\triangle CDA$, $\therefore \dfrac{BM}{CA}=\dfrac{BD}{CD}$. $\because DC=\dfrac{5}{2}BD$, $AC=6$ km, $\therefore \dfrac{BM}{6}=\dfrac{2}{5}$, 解得 $BM=\dfrac{12}{5}$. 在 Rt$\triangle ABM$ 中, 由 $\sin\angle BAD=\sin 37^\circ=\dfrac{BM}{AB}=\dfrac{\frac{12}{5}}{AB}\approx\dfrac{3}{5}$, 解得 $AB=4$.




答: 岛 $A$ 与港口 $B$ 之间的距离约为 4 km.

(2) 如图, 在 Rt$\triangle ABM$ 中, $AM=AB\times\cos 37^\circ\approx 4\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{5}$. $\because \triangle BDM\backsim\triangle CDA$, $\therefore \dfrac{DM}{AD}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{2}{5}$, $\therefore AD=\dfrac{5}{7}AM=\dfrac{16}{5}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{16}{7}$. 在 Rt$\triangle ADC$ 中, $\tan C=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\frac{16}{7}}{6}=\dfrac{8}{21}$.

**刷章测**

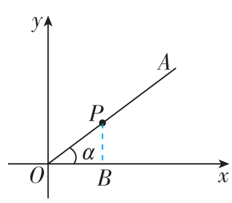
**关键点拨** 锐角的三角函数值的求解是建立在直角三角形的基础上的, 所以求解前, 应确定角所在的直角三角形.

**1. B** 【解析】

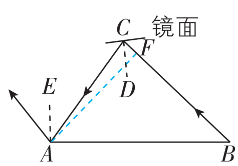
| | |
|---|---|
| A | 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\sin A=\dfrac{BC}{AC}$, 故 A 不符合题意 |
| B | 在 Rt$\triangle AED$ 中, $\cos A=\dfrac{AE}{AD}$, 故 B 符合题意 |
| C | 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\tan A=\dfrac{CB}{AB}$, 故 C 不符合题意 |
| D | 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\tan A=\dfrac{CB}{AB}$, 故 D 不符合题意 |

**2. B**　【解析】∵ $\angle A,\angle B,\angle C$ 的度数之比为 $1:2:3$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，∴ $\angle A=\frac{1}{6}\times180°=30°$，$\angle B=\frac{2}{6}\times180°=60°$，∴ $\sin A=\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\sin B=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\sin A:\sin B=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=1:\sqrt{3}$，故选 B.

**3. D**　【解析】过点 $P$ 作 $PB\perp x$ 轴于点 $B$，如图. ∵ $\cos\alpha=\frac{OB}{OP}=\frac{4}{5}$，∴ 可假设 $OB=4$，则 $OP=5$，∴ $PB=\sqrt{5^2-4^2}=3$，∴ 点 $P$ 的坐标可能是 $(4,3)$. 故选 D.



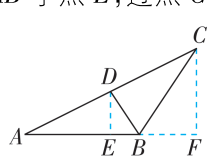
（第 3 题图）



（第 4 题图）

**4. D**　【解析】如图，过点 $A$ 作 $AF\perp BC$，垂足为 $F$，则 $\angle AFB=\angle AFC=90°$. ∵ $EA\perp AB$，∴ $\angle EAB=90°$. ∵ $\angle BCD=\angle ACD=41°$，∴ $\angle ACB=82°$. ∵ $\angle CAE=37°$，∴ $\angle CAB=\angle EAB-\angle EAC=53°$，∴ $\angle ABC=180°-\angle CAB-\angle ACB=45°$. 在 Rt△$ABF$ 中，$\angle ABC=45°$，∴ $AF=AB\cdot\sin 45°=11\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=11$（米）. 在 Rt△$ACF$ 中，$\angle ACB=82°$，∴ $AC=AF\div\sin 82°\approx11\div0.99\approx11$（米），故选 D.

**5. C**　【解析】过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，过点 $C$ 作 $CF\perp AB$ 交 $AB$ 的延长线于 $F$，如图所示. ∵ $BD$ 是 △$ABC$ 的中线，$AC=6\sqrt{5}$，∴ $AD=CD=\frac{1}{2}AC=3\sqrt{5}$. 在 Rt△$ADE$ 中，$\tan A=\frac{DE}{AE}=\frac{1}{2}$，∴ $AE=2DE$. 由勾股定理得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{5}DE$，∴ $3\sqrt{5}=\sqrt{5}DE$，∴ $DE=3$，∴ $AE=2DE=6$. ∵ $DE\perp AB$，$CF\perp AB$，∴ $DE/\!/CF$. 又∵ $BD$ 是△$ABC$ 的中线，∴ $DE$ 是△$ACF$ 的中位线，∴ $CF=2DE=6$，$AE=EF=6$. 设 $BE=a$，则 $BF=EF-BE=6-a$，$AB=AE+BE=6+a$. 在 Rt△$BDE$ 中，由勾股定理得 $BD^2=DE^2+BE^2=3^2+a^2$，在 Rt△$CBF$ 中，由勾股定理得 $BC^2=BF^2+CF^2=(6-a)^2+6^2$. ∵ $BC=2BD$，∴ $4(3^2+a^2)=(6-a)^2+6^2$，整理得 $a^2+4a-12=0$，解得 $a=2$ 或 $a=-6$（不合题意，舍去），∴ $AB=6+a=8$. 故选 C.

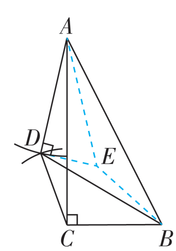



思路分析◀ 利用等角的三角函数值相等，可得 $\tan\angle ADE=\tan C$，可以设 $CE=m$，$DE=mk$，用含参数 $m$ 的式子来表示线段的长，最终消去参数，从而求出结果.

**6. A**　【解析】∵ $AB=BC$，∴ $\angle BAC=\angle C$. 又∵ $DA\perp AB$，$DE\perp CA$，∴ $\angle BAD=\angle DEA=90°$，∴ $\angle BAC+\angle DAE=\angle DAE+\angle ADE=90°$，∴ $\angle BAC=\angle ADE$，∴ $\angle C=\angle ADE$，∴ $\tan\angle ADE=\tan C=k$. 在 Rt△$CDE$ 中，$\tan C=\frac{DE}{CE}=k$，∴ 令 $CE=m$，$DE=mk$. 又∵ $CD=1$，∴ $m^2+m^2k^2=1^2$，则 $m^2=\frac{1}{k^2+1}$. 在 Rt△$ADE$ 中，$\tan\angle ADE=\frac{AE}{DE}=k$，∴ $AE=mk^2$，∴ $AD=\sqrt{m^2k^4+m^2k^2}=\sqrt{m^2k^2(k^2+1)}=\sqrt{\frac{1}{k^2+1}\cdot k^2\cdot(k^2+1)}=k$. 故选 A.

思路分析◀ 构造△$ADE$，使 $\angle ADE=90°$，且 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，从而得出△$ADC$∽△$AEB$，并求出 $EB$ 的长，根据 $BD\leqslant BE+DE$，判断出当 $B,E,D$ 三点共线时，$BD$ 的值最大即可得解.

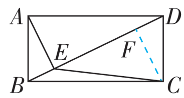
**7. C**　【解析】在 Rt△$ABC$ 中，$\tan\angle ABC=2$，则 $\frac{AC}{BC}=2$，可设 $BC=a$，$AC=2a$. 由 $AB^2=BC^2+AC^2$，得 $AB=\sqrt{5}a$，∴ $\cos\angle BAC=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 如图，作 $\angle ADE=90°$，且 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，连接 $AE$，$BE$，则 $\tan\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2}$. ∵ $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，∴ $\tan\angle BAC=\tan\angle DAE$. ∵ 两角均为锐角，∴ $\angle BAC=\angle DAE$，∴ $\angle BAC-\angle CAE=\angle DAE-\angle CAE$，即 $\angle DAC=\angle EAB$. ∵ $\cos\angle DAE=\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$. 又∵ $\angle DAC=\angle EAB$，∴ △$ADC$∽△$AEB$，∴ $\frac{DC}{EB}=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ∵ $DC=2$，∴ $EB=\sqrt{5}$. 由题意可知，$BD\leqslant BE+DE=\sqrt{5}+\frac{3}{2}$. ∵ 当 $B,E,D$ 三点共线时，$BD$ 的值最大，∴ $BD$ 的最大值为 $\sqrt{5}+\frac{3}{2}$. 故选 C.




**8.** $\frac{\sin 45°}{\sin 30°}$（答案不唯一）　【解析】∵ $\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\sqrt{2}=\frac{\sin 45°}{\sin 30°}$（答案不唯

一). 故答案为$\frac{\sin 45°}{\sin 30°}$(答案不唯一).

**9.** $\frac{2}{3}$ 【解析】如图,过点 $C$ 作 $CF\perp BD$ 于 $F$,则 $\angle CFD=\angle AEB=90°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $AB=CD$,$AB/\!/CD$,∴ $\angle ABE=\angle CDF$.




在△$ABE$ 与△$CDF$ 中,$\begin{cases}\angle AEB=\angle CFD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ AB=CD,\end{cases}$

∴ △$ABE$≌△$CDF$(AAS),∴ $AE=CF$,$BE=FD$. ∵ $\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}$,∴ 可设 $AB=a$,$AD=2a$,∴ $BD=\sqrt{5}a$. ∵ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot AD$,∴ $AE=CF=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$,∴ 易得 $BE=FD=\frac{\sqrt{5}}{5}a$,∴ $EF=BD-2BE=\sqrt{5}a-\frac{2\sqrt{5}}{5}a=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$,∴ $\tan\angle DEC=\frac{CF}{EF}=\frac{2}{3}$. 故答案为$\frac{2}{3}$.

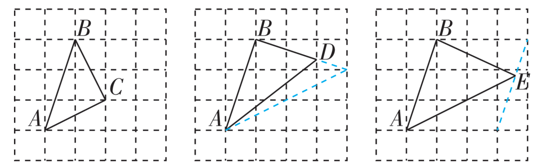
> **思路分析** 过点 $C$ 作 $CF\perp BD$ 于点 $F$. 易证 △$ABE$≌△$CDF$(AAS),设 $AB=a$. 从而可求出 $AE=CF=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$,易得 $BE=FD=\frac{\sqrt{5}}{5}a$,再求出 $EF$ 的长,根据锐角三角函数的定义即可求出答案.

**10.** $\frac{24}{5}$ 【解析】在 Rt△$ABD$ 中,∵ $\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{3}{4}$,∴ $AD=\frac{4}{3}\times6=8$,∴ $BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$,∴ $\sin D=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ∵ 点 $C$ 为斜边 $BD$ 的中点,∴ $AC=BC=CD$,∴ $\angle CAD=\angle D$,∴ 在 Rt△$APE$ 中,$\sin\angle EAP=\frac{PE}{AP}=\frac{3}{5}$,∴ $PE=\frac{3}{5}AP$. 在 Rt△$DPF$ 中,$\sin D=\frac{PF}{PD}=\frac{3}{5}$,∴ $PF=\frac{3}{5}PD$,∴ $PE+PF=\frac{3}{5}(AP+PD)=\frac{3}{5}AD=\frac{3}{5}\times8=\frac{24}{5}$. 故答案为$\frac{24}{5}$.

**11.**【解】∵ $\alpha$ 是锐角,且 $\cos(\alpha+15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,∴ $\alpha+15°=45°$,∴ $\alpha=30°$,∴ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}-(\pi-3.14)^0+|2\sqrt{3}-3\tan 2\alpha|=2+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}-1+|2\sqrt{3}-3\tan 60°|=2+\frac{\sqrt{3}}{6}-1+|2\sqrt{3}-3\times\sqrt{3}|=1+\frac{\sqrt{3}}{6}+\sqrt{3}=1+\frac{7\sqrt{3}}{6}$.

**12.**【解】(1)如图(1),△$ABC$ 即为所求.(答案不唯一)

(2)如图(2),△$ABD$ 即为所求.(答案不唯一)




图(1)　图(2)　图(3)

(3)如图(3),△$ABE$ 即为所求.

**13.** (1)【证明】连接 $DO$ 交 $AC$ 于点 $E$.

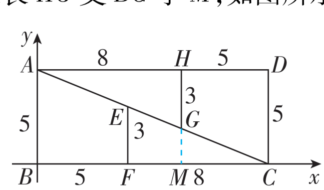
∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$,$OD$ 为⊙$O$ 的半径,∴ 易得 $OD\perp AC$. ∵ $DP$ 为⊙$O$ 的切线,∴ $\angle ODP=90°$. ∵ $AB$ 是⊙$O$ 的直径,∴ $\angle ACP=\angle ACB=90°$,∴ 四边形 $DECP$ 为矩形,∴ $\angle P=90°$.

(2)【解】连接 $OC$. 在△$CDP$ 中,$\angle P=90°$,$\tan\angle CDP=\frac{CP}{DP}=\frac{2}{3}$,$PC=4$,∴ $DP=6$. ∵ 四边形 $DECP$ 是矩形,∴ $DE=PC=4$,$EC=DP=6$. 设⊙$O$ 的半径为 $r$. 在 Rt△$CEO$ 中,$OE^2+CE^2=OC^2$,$OE=r-4$,∴ $(r-4)^2+6^2=r^2$,解得 $r=\frac{13}{2}$,∴ $OE=r-4=\frac{5}{2}$. ∵ $OD\perp AC$,$\angle ACB=90°$,∴ $OE/\!/BC$. 又∵ $OA=OB$,∴ $OE$ 是△$ABC$ 的中位线,∴ $BC=2OE$,∴ $BC=5$.

> **思路分析** (2)连接 $OD$ 交 $AC$ 于 $E$,连接 $OC$,求出 $DE=4$,$EC=6$. 设半径为 $r$,由勾股定理求出 $r$,进而可得 $OE$ 的长,利用三角形的中位线定理可得 $BC$ 的长.

**14.** (1)【解】依题意得拼接的四边形 $ABCD$ 为矩形,∴ $AB=CD=5$,$BC=AD=CF+BF=8+5=13$,则在 Rt△$CEF$ 中,$\tan\angle CEF=\frac{CF}{EF}=\frac{8}{3}$,在 Rt△$CAB$ 中,$\tan\angle EAB=\frac{BC}{AB}=\frac{13}{5}$,∴ $\tan\angle CEF>\tan\angle EAB$,∴ $\angle CEF>\angle EAB$. ∵ $EF/\!/AB$,∴ $\angle EAB+\angle AEF=180°$,∴ $\angle CEF+\angle AEF>180°$,∴ $A$,$E$,$C$ 三点不共线,同理 $A$,$G$,$C$ 三点不共线. ∴ 拼合的长方形内部有空隙,故面积多了 1 $cm^2$. 故答案为$\frac{8}{3}$,$\frac{13}{5}$.

(2)【证明】以 $B$ 为原点,$BC$ 所在的直线为 $x$ 轴,$AB$ 所在的直线为 $y$ 轴,建立平面直角坐标系,延长 $HG$ 交 $BC$ 于 $M$,如图所示.




依题意得拼合的四边形 $ABCD$ 为矩形,则四

边形 $ABCD$，四边形 $ABMH$，四边形 $MCDH$ 都是矩形，∴ $AB=CD=5$，$BC=AD=CF+BF=8+5=13$，$BM=AH=8$，$HM=CD=5$，则 $GM=HM-HG=5-3=2$，∴ 点 $A(0,5)$，点 $E(5,3)$，点 $G(8,2)$，点 $C(13,0)$. 设直线 $AC$ 的解析式为 $y=kx+b$. 将 $A(0,5)$，$C(13,0)$ 代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}b=5,\\13k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{5}{13},\\b=5,\end{cases}$ ∴ 直线 $AC$ 的解析式为 $y=-\dfrac{5}{13}x+5$. 当 $x=5$ 时，$y=-\dfrac{5}{13}\times5+5=\dfrac{40}{13}\neq3$，∴ 点 $E$ 不在直线 $AC$ 上，∴ $A,E,C$ 三点不共线. 当 $x=8$ 时，$y=-\dfrac{5}{13}\times8+5=\dfrac{25}{13}\neq2$，∴ 点 $G$ 不在直线 $AC$ 上，∴ $A,G,C$ 三点不共线，∴ 拼合的长方形内部有空隙，故面积多了 1 $cm^2$.

# 第二十九章 投影与视图

## 29.1 投影

### 课时 1 平行投影与中心投影

**刷基础**

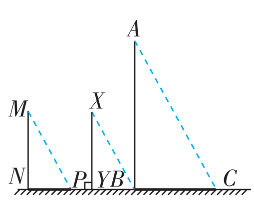
**1. B** 【解析】A 选项，小明看到镜子里的自己不是投影，不符合题意；B 选项，灯光下猫咪映在墙上的影子是投影，符合题意；C 选项，自行车行驶过后车轮留下的痕迹不是投影，不符合题意；D 选项，掉在地上的树叶不是投影，不符合题意. 故选 B.

**2. D** 【解析】当三角尺与光线平行时，所形成的投影为一条线段；当三角尺与光线垂直时，所形成的投影是与原三角尺全等的三角形；当三角尺与光线形成一定角度但不垂直时，所形成的投影是与原三角尺不全等的三角形；三角尺的投影不可能是一个点. 故选 D.

**刷有所得** 将一块三角尺放在太阳光下，当它与太阳光线平行时，它所形成的投影是一条线段，当它与光线成一定角度但不垂直时，它所形成的投影是三角形.

**3. D** 【解析】由题意可得都是下午拍摄，∴ 影子越长时间越晚. ∵ 照片上景物的影子长度 $l_m>l_n>l_r$，∴ $m,n,r$ 拍照时间的先后顺序是 $r,n,m$. 故选 D.

**4.** 【解】(1) 如图，连接 $AC$，过点 $M$ 作 $MP/\!/AC$ 交 $NC$ 所在的直线于点 $P$. $NP$ 就是测杆 $MN$ 的影子.



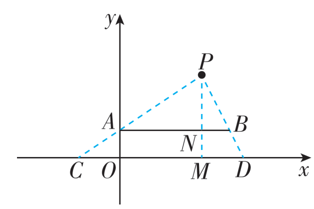

(2) 如图，过点 $B$ 作 $BX/\!/AC$，且 $BX=MP$，过点 $X$ 作 $XY\perp NC$ 交 $NC$ 所在的直线于点 $Y$，则 $XY$ 即为所求.

**5. D** 【解析】小明的影子在他的左侧，小颖的影子在她的右侧.

**6.** 16 cm 【解析】由中心投影的性质可知 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，∴ $\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$，∴ $\dfrac{12}{A_1C_1}=\dfrac{15}{20}$，∴ $A_1C_1=16$ cm. 故答案为 16 cm.

**关键点拨** 由中心投影的性质可得 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，再根据相似三角形对应边成比例求解即可.

**7.** 【解】如图，连接 $PA,PB$ 并延长分别交 $x$ 轴于点 $C,D$，线段 $CD$ 就是木杆 $AB$ 在 $x$ 轴上的投影.




过点 $P$ 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 $M$，交 $AB$ 于点 $N$，如图所示. ∵ 点 $P(3,3)$，$A(0,1)$，$B(4,1)$，∴ $AB=4$，$PN=2$，$PM=3$. ∵ $AB/\!/CD$，∴ $\triangle PAB\backsim\triangle PCD$，∴ $\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{AB}{CD}$，即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{CD}$，∴ $CD=6$. 故木杆 $AB$ 在 $x$ 轴上的投影长为 6.

**刷提升**

**1. B** 【解析】若影子是由太阳光线照射形成的，则两根支柱所形成的影子所在的直线一定平行；若影子是由灯光照射形成的，则两根支柱所形成的影子所在的直线一定相交. 所以可判断形成该影子的光线为灯光光线. 故选 B.

**2. B** 【解析】如图(简略图)，$FE$ 为路灯，设人高固定为 $a$. 当人站在点 $B$ 处时，由相似三角形的性质知 $\dfrac{a}{FE}=\dfrac{AB}{AE}$，人的影长为 $AB=\dfrac{aAE}{FE}$；当人站在点 $D$ 处时，由相似三角形的性质知 $\dfrac{a}{FE}=\dfrac{CD}{CE}$，人的影长为 $CD=\dfrac{aCE}{FE}$. ∵ $AE>CE$，∴ $\dfrac{aAE}{FE}>\dfrac{aCE}{FE}$，∴ $AB>CD$，∴ $m$ 变小，人的影长变短. 故选 B.